# 多元复分析

# COMPLEX ANALYSIS IN SEVERAL VARIABLES

钟同德　黄　沙　编著

ZHONG TONGDE HUANG SHA

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河 北 教 育 出 版 社

# 多元复分析

## COMPLEX ANALYSIS IN SEVERAL VARIABLES

钟同德　黄　沙　编著
ZHONG TONGDE　HUANG SHA

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河 北 教 育 出 版 社

## 内 容 简 介

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一.本书介绍多复变数中有广泛应用的三种方法:积分表示,复几何,层与上同调理论.在此基础上详细介绍近二十年来蓬勃发展的研究方向:多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$ 方程,Stein 流形上的函数论,全纯开拓和双全纯映射的 Fefferman 定理等,目的是帮助读者较快地进入前沿开展研究工作.

本书适合大学数学系师生,以及从事函数论、代数几何、微分几何、拓扑学、微分方程和理论物理研究的工作者阅读.

**多 元 复 分 析**

Complex Analysis

In Several Variables

钟同德　黄　沙　编著

Zhong Tongde　Huang Sha

国家自然科学基金和河北省教委资助的课题

河北教育出版社出版(石家庄市北马路 45 号)

河北新华印刷三厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168 毫米 1/32　12 印张　292,000 字　1990 年 8 月第 1 版

1990 年 8 月第 1 次印刷　印数:1—500　定价:4.40 元

ISBN 7-5434-0738-8/O・21

# 序　言

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一.量变到质变的规律使多元复分析和单复变量分析的理论在许多方面都绝然不同.例如单复变量的 Riemann 映射定理在多复变量已不再成立,$C^n$ 空间中域的分类问题至今没有解决;又如在 $C^n$ 空间中一域上的全纯函数的数值有时不必由全部边界上的数值决定;此外在 $C^n$ 中有所谓 Hartogs 现象,例如在超球环 $\frac{1}{2} < |Z_1|^2 + |Z_2|^2 < 1$ 中全纯的函数一定在超球 $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 < 1$ 上全纯.

早在 19 世纪末和 20 世纪初许多著名数学家就已提出多复变数中的著名问题,例如 1907 年 H·Poincare′ 就已发现 $C^2$ 中的双圆柱和超球不是全纯等价的,因此单复变量的 Riemann 映射定理在 $C^n$ 中不再成立;1895 年 Cousin 提出了著名的 Cousin 问题,即在 $C^n$ 中拓广单复变数的 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理;1911 年 E·E·Levi 提出拟凸域是否纯域的 Levi 问题;1936 年 E·Cartan 提出可递域是否都是对称域?但是这些著名猜想一直到本世纪 50 年代初 H·Cartan 及 J·P·Serre 才漂亮地解决了 Cousin 问题,K·Oka 等人解决了 Levi 猜想,60 年代初 Пятецкии-Щапиро 才给出了 E·Cartan 猜想的反例.由于这些难题的解决,从而也发展了一些有效的方法,例如多次调和函数,全纯函数局部环的代数"凝聚理论"和凝聚解析层的上同调理论等,因而也促进了多复变数和现代数学的发展.60 年代中 J·J·Kohn,L·Hörmander 和 70 年初 Γ·M·Хенкин,H·Grauert,I·Lieb 等人又解决了在多复变函数论中有重大意义的 $\bar{\partial}$ 问题,分别提出了 $\bar{\partial}$ 问题的 $L^2$ 估计和 $L^\infty$ 估计方法,从而又提供了一种解决 Cousin 问题和 Levi 问题的新方法.1974 年 C·

Fefferman 又提出了双全纯映射的 Fefferman 定理，为拟凸域的分类问题开辟了方向. 自从 1970 年 Г·М·Хенкин 和 H·Grauert, I·Lieb 等得到了 $\bar{\partial}$ 方程解的积分表示以后，积分表示的方法就成为研究多复变函数的较统一的方法；积分表示方法一方面既容易和单复变数的 Cauchy 积分方法类比，同时由于具体，因此也便于估计，所以二十年来得到蓬勃的发展. 由以上所说可知多元复分析的研究虽然在 19 世纪末和 20 世纪初就已开始，但一直到 50 年代以后才开始得到发展，特别是 70 年代以后更是方兴未艾.

由于多元复分析的研究对象是多复变数的函数和复流形，所以在它的研究中几乎使用了所有现代数学的概念和方法，例如微分几何，代数几何，李群，拓扑学，偏微分方程，泛涵分析等等，而多复数的发展又促进了其它学科的发展，例如大范围分析，代数几何，微分几何，偏微分方程等.

根据编者多年从事多元复分析的教学和研究，深感入门不易，深造更难，主要是由于多元复分析的内容广泛，用到的数学工具多，难于自学，所以很需要有一本有现代水平的，能在有限篇幅中，既介绍这学科的发展主流和最新成果，又介绍必要的各种数学方法. 基于这个设想，本书介绍了多复变数中目前广泛应用而又必要的三种方法：积分表示，复几何和层与上同调理论，同时详细介绍了多复变全纯函数的基本性质和全纯域与拟凸域的理论，目的是为初学者打好必要的基础；在这基础上我们详细介绍了近二十年来蓬勃发展的研究方向：多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$ 方程，Stein 流形上的函数论，全纯开拓和双全纯映射的 Fefferman 定理等，目的是引导帮助读者较快地进入前沿开展研究工作.

本书第一章介绍多复变数全纯函数的基本性质，第二章介绍全纯域与拟凸域，第三章介绍微分形式和 Hermite 几何，第四章介绍多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$— 方程，第五章介绍复流形上的函数论，第六章介绍层与上同调及其应用.

本书的叙述尽可能将抽象概念具体化；详细介绍问题的历史背景和发展前景，指出必要的参考文献供读者进一步研究时参考，同时本书叙述时也尽可能让读者了解多元复分析的全貌，详细分析各种问题和方法之间的联系，并着重介绍上述二十年来蓬勃发展的多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$— 方程，Stein 流形上的函数论等几个研究方向，以便使读者能在较短时间内独立进行研究工作.

多元复分析的研究内容广泛，方法繁多，本书介绍的只是其中的一部分，但是只要掌握了这些内容，就不难乘胜前进扩大阵地，更新武器；同时我们认为正因为多元复分析的研究内容广泛，所以容易吸引有广泛兴趣的数学工作者，也正因为使用的方法多，所以凡在某些方面已学有所长的，都可以在这块光辉灿烂的园地有用武之地，所以希望更多的有志青年进入这块有吸引力的美丽园地，为多元复分析的发展作出杰出的贡献.

本书的编写得到国家自然科学基金和河北省教委的赞助.

编　者

1989 年 7 月

# Complex Analysis in Several Variables

**Zhong Tongde  Huang Sha**

This introductory text deals with three fundamental methods in several complex variables: Integral representations Complex geometry, Sheaf and Cohomology theory. On the basis of these methods the authors devote to introducing some research topics which are developping quickly in the last 20 years: Integral representations in several complex variables and $\bar{\partial}$-equations, Theory of functions on Stein manifolds, Holomorphic extension and C • Fefferman's famous mapping theorem of biholomorphic mapping, etc., so that the readers may get an all-round view of the recent developments of researches on these subjects.

The authors devote the first chapter to introducing the definition of holomorphic functions of several complex variables and their fundamental properties. The second chapter discuss holomorphic domains and pseudoconvex domains. Holomorphic convexity, Levi convexity and plurisubharmonic convexity are introduced, and pseudoconvex domain with $C^{(2)}$ smooty boundary , general pseudoconvex domain as well as Levi problem are discussed. The third chapter discuss differential forms and Hermitian geometry. Stoke's formula, Vector boundles and holomorphic vector boundles, connection and curvature of vector boundles, Hermitian manifolds and Kaehler manifolds are treated. Described methodically in the fourth chapter are various integral representations of the holomorphic functions on various domains in the space of $C^n$ and

Stein manifolds, for example Bochner-Martinelli integral representation, Cauchy-Fantappie formula, Henkin-Ramirez formula. The Koppelman-Leray formula and the integral representations of the solution of $\bar{\partial}$-equations of (p, q) type are described. The fiveth chapter devote to discuss function theory on complex manifolds. J • Plemelj formula with Bochner-Martinelli kernel in $C^n$ and Stein manifolds, Hartogs-Bochner theorem of holomorphic extension are introduced. Besides, the orthogonal systems and Bergman kernel function theroy on the bounded domain in $C^n$ are discussed, and a simplified proof of C • Fefferman's famous mapping theorem is introduced. In the last chapter are the sheaf and cohomolgy theory and its application to Cousin problem and division problem.

# 目　录

# 第一章　多复变数全纯函数的基本性质

由于在复数平面上著名的 Riemann 映射基本定理在多复变数空间 $C^n$ 中不再成立(参考后面的第 1.4.4 段),$C^n$ 空间中不同区域上的全纯函数的 Cauchy 积分公式具有各种不同形式(参考第四章),$C^n$ 空间中的全纯函数还有复数平面上没有的 Hartogs 现象(参考 1.3.3 段和第二章),所以多复变数全纯函数的性质已在许多方面和单复变数全纯函数截然不同,本章介绍多复变数全纯函数的定义和一些同单复变数全纯函数类似的性质,作为以后各章内容的基础.

## § 1.1　多复变数全纯函数的定义和简单性质

### 1.1.1　记号

我们分别用 $C^n$ 和 $R^n$ 表示 $n$ 个复变数和实变数的空间,$C^n = R^n + iR^n$. $R^n$ 空间中的点用 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, $y, \xi, \eta$ 等表示;$C^n$ 空间中相应的点用 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) = x + iy, \zeta, \cdots$ 表示. 点 $z$ 的共轭点用 $\bar{z}$ 表示,$\bar{z} = x - iy$. 符号 $|z|, |x|, \cdots, z\zeta, z\xi, \cdots$ 分别表示欧几里得长度(模)和数量积

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, z\zeta = z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \cdots + z_n\zeta_n.$$

如果 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 表示具有非负分量的整数向量,命

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \partial z_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!, z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

符号 $z^\alpha$ 也可以用来表示负整数 $\alpha_j$ 的情形. 向量$(1,1,\cdots 1)$ 记为 $I$. 当不致引起混乱时,我们将记 $z_1z_2\cdots z_n$ 为 $z^I$,记 $dz_1dz_2\cdots dz_n$ 为 $dz$,以及记$(z_2,\cdots,z_n)$ 为 $\tilde{z}$

如果 $z^0\in C^n, r>0$,以

$$B(z^0,r)=\{z\in C^n:|z-z^0|<r\}$$

定义以 $z^0$ 为心半径为 $r$ 的**开球**,以

$$D^n(z^0,r)=\{z\in C^n:|z_j-z_j^0|<r,j=1,\cdots,n\}$$

定义以 $z_0$ 为心半径为 $r$ 的**开多圆柱**. 命 $D$ 表示单位圆盘 $D^1(0.1)\subseteq C$. 符号 $\overline{B}(z^0,r),\overline{D}^n(z^0,r)$ 分别表示 $B(z^0,r),D^n(z^0,r)$ 的闭包. 有时考虑如下形式

$D^n(z^0,r) = D^1(z_1^0,r_1) \times \cdots \times D^1(z_n^0,r_n) = \{z\in C^n:|z_j-z_j^0|<r_j,j=1,\cdots,n\}$的多圆柱,其中 $r=(r_1,\cdots,r_n)$.

$C^n$ 空间中的"区域"$D$ 是一连通开集,在许多情形 $R^N$(或 $C^n$)中的区域 $D$ 都具有 $-C^{(j)}$ 边界,$j\geqslant 1$. 后者表示有 $-C^{(j)}$ 函数 $\rho:R^N\to R$(或 $\rho:C^n\to R$)使得

$$D=\{z:\rho(z)<0\}$$

且对所有 $z\in\partial D,\mathrm{grad}\rho(z)\neq 0$,我们用记号 $\partial D$ 表示 $D$ 的边界,函数 $\rho$ 称为 $D$ 的**定义函数**.

定义

$$\begin{aligned}dv(z)=dv_n(z)&=\left(\frac{1}{2i}\right)^n(d\bar{z}_1\wedge dz_1)\wedge\cdots\wedge(d\bar{z}_n\wedge dz_n\\&=\left(\frac{1}{2i}\right)^n(2idx_1\wedge dy_1)\wedge\cdots\wedge(2idx_n\wedge dy_n)\\&=dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n\end{aligned}$$

为 $C^n$ 的体积形式,记号 $dv$ 也表示 $R^N$ 的体积.

### 1.1.2 多复变数全纯函数的定义

我们有以下四个多复变数全纯函数的定义.

**定义 1.1.1　全纯函数的 Riemann 定义**　函数 $f(z)$ 称为**在点 $z^0 \in C^n$ 全纯**，如果在这点的某一邻域存在所有一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}$，$\alpha = 1, 2, \cdots, n$，即如果满足 Cauchy-Riemann 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}, \alpha = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1.1}$$

其中 $f = u + iv$，$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$.

因此，函数在 Riemann 意义下在 $z^0$ 全纯，如果它在这点的某一邻域分别对每一个变量全纯（当固定其余变量时）.

如果将

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

或　$$x_\alpha = \frac{z_\alpha + \bar{z}_\alpha}{2}, \quad y_\alpha = \frac{z_\alpha - \bar{z}_\alpha}{2i}$$

看作变量的变换而引进**形式导数**

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right),$$

即若 $f(x, y)$ 是实变量 $x, y$ 的有连续偏导数的函数，则定义

$$\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right).$$

如是 Cauchy-Riemann 方程(1.1.1) 可书为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n. \tag{1.1.2}$$

这时定义 1.1.1 可写成

**定义 1.1.2**　函数 $f(z)$ 称为在点 $z^0 \in C^n$ 全纯，如果在这点的某一邻域分别对每一个复变量都是连续可微，并满足 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0$，$\alpha = 1, \cdots, n$.

**定义 1.1.3**　全纯函数的 Weierstrass 定义　函数 $f(z)$ 称为**在点 $z^0 \in C^n$ 全纯**，如果在这点的邻域它可写成一个**绝对收敛的幂级数**

$$f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (z - z^0)^\alpha, a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(z^0). \tag{1.1.3}$$

这个幂级数称为全纯函数 $f(z)$ 的 Taylor 展开式.

**定义 1.1.4** 设函数 $f(z)$ 分别对每一个变量都是连续的而且局部有界,则函数 $f$ 称为**在点** $z^0 \in C^n$ 全纯,如果在这点的某一多圆柱邻域 $D^n(z^0,r)$ 可以表成

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_n - z_n^0| = r}\cdots\int_{|\zeta_1 - z^0| = r}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

对所有的 $z \in D^n(z^0,r)$.

以上全纯函数的四个定义是等价的.

### 1.1.3 全纯函数定义的等价性

定义 1.1.1 和定义 1.1.2 的等价性是显然的. 定义 1.1.1 和定义 1.1.4 的等价性只要重复应用单复变数的 Cauchy 积分公式就可以得到.

以下我们证明定义 1.1.1 和定义 1.1.3 的等价性.

**先证定义 1.1.3 → 定义 1.1.1:**

设函数 $f(z)$ 在点 $z^0$ 在 Weierstrass 意义下是全纯的. 那末级数 (1.1.3) 在某一闭多圆柱 $\overline{D^n}(z^0,r)$ 是绝对收敛的,于是对某一 $M > 0$,有

$$|a_\alpha| \leqslant \frac{M}{r^\alpha}, \quad |\alpha| = 0,1,\cdots \tag{1.1.4}$$

在此 $r = (r_1,r_2,\cdots,r_n)$. 因此级数(1.1.3) 在 $D^n(z^0,r)$ 中被级数

$$M\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\left(\frac{z - z^0}{r}\right)^\alpha = M\left(1 - \frac{z - z^0}{r}\right)^{-1}$$

所优越,并且他可以逐项微分无穷次,而且他的所有导数都是连续函数. 特别

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}D^\alpha \quad f(z^0). \tag{1.1.5}$$

因此,**每一个在 Weierstrass 意义下的全纯函数,都是无穷次连续可微的,并且它的导数还是全纯函数**. 特别,每一个在 Weierstrass 意义下的全纯函数,在 Riemann 意义下都是全纯的.

**其次证定义 1.1.1 → 定义 1.1.3：**

从定义 1.1.1 推出定义 1.1.3 实际上是下面的 Hartogs 基本定理(Hartogs [1906b])

**定理 1.1.1 Hartogs 基本定理** 如果函数 $f(z)$ 对每一个变量分别是全纯的，那么他对变量的全体是全纯的(在 Weierstrass 意义下的全纯).

这个定理的证明比较困难，请参阅钟同德[1986].

现在我们在函数 $f(z)$ 是有界的补充假定下来证明这个定理.

假设函数 $f(z)$ 分别对每一个变量 $z_j$ 是全纯的并且在闭多圆柱 $\overline{D^n}(z^0,r)$ 上是有界的(由 Heine-Borel 引理，这表示 $f(z)$ 分别对每一个变量在略大一点的多圆柱 $D^n(z^0,r+\varepsilon I)$ 上是全纯的，其中 $\varepsilon>0$). 因此，连续应用单复变量的 Cauchy 公式，对所有的 $z\in D^n(z^0,r)$ 我们有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D^1(z_1^0,r_1)}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\int_{\partial D^1(z_2^0,r_2)}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}\cdots\int_{\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta_n}{\zeta_n-z_n},\tag{1.1.6}$$

其中在 $\partial D^1(z_j^0,r_j)$ 上的正向取反时针的方向. (1.1.6) 中的被积函数

$$f(\zeta)=f(z_1^0+r_1e^{i\theta_1},z_2^0+r_2e^{i\theta_2},\cdots,z_n^0+r_ne^{i\theta_n})\equiv f(z^0+re^{i\theta})$$

由假定当 $0\leqslant\theta_j\leqslant 2\pi$, $j=1,2,\cdots,n$ 时按模一致有界. 不难证明这个函数是可测的. 因此它是可积的并且由 Fubini 定理屡次积分(1.1.6) 可化成重积分

$$f(z)=\frac{r^I}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+re^{i\theta})e^{i\theta I}d\theta}{(z^0+re^{i\theta}-z)^I}\equiv\tag{1.1.7}$$

$$\equiv\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D^1(z_1^0,r_1)\times\cdots\times\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^I},\ z\in D^n(z^0,r)$$

设 $z\in D^n(z^0,r')$, $r_j'<r_j$, 那末级数

(1.1.8) $$\frac{1}{(z^0+re^{i\theta}-z)^I}=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{(z-z^0)^\alpha}{r^{\alpha+I}}e^{-i\theta(\alpha+I)}$$

关于$z$和$\theta$绝对且一致收敛. 由于$f(\zeta)$有界,因此可将级数(1.1.8)代入公式(1.1.7),然后可以交换积分和和号次序,由此得到Taylor 级数(1.1.3),它在多圆柱$D^n(z^0,r)$绝对收敛并有系数

(1.1.9) $$a_\alpha=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+re^{i\theta})}{r^\alpha}e^{-i\theta_\alpha}d\theta\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\partial D^1(z_1^0,r_1)\times\cdots\times\partial D^1(z_n^0,r_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z^0)^{\alpha+I}}.$$

这就是所要证明的.□

我们说给定在区域$D\subset C^n$上的**函数 f(z) 在区域 D 上是全纯的**,如果它在区域$D$上的每一点是全纯的.

### 1.1.4 广义多圆柱上的 Cauchy 积分公式

设$D_\alpha$为$z_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$平面的有界区域,当$z_1,\cdots,z_n$彼此无关地分别在$D_1,\cdots,D_n$上变动时,复数组$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$的全体所构成的$C^n$中的区域,称为**广义多圆柱区域**,以$(D_1,\cdots,D_n)$表示之,即$(D_1,D_2,\cdots,D_n)=D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$. 事实上广义多圆柱区域$(D_1,D_2,\cdots,D_n)$是$n$个平面区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$的拓扑乘积.

**定理 1.1.2** 设$D=D_1\times\cdots\times D_n$为广义多圆柱,其中每一$D_\alpha$皆是$Z_\alpha$平面的有界区域,其边界$\partial D_\alpha$由有限多个互不相交的、有长的、简单的闭曲线组成,设$f(z)$在$D=D_1\times\cdots\times D_n$全纯,且在其边界仍然连续,则对任一点$Z\in D_1\times\cdots\times D_n$有广义多圆柱的Cauchy 公式

(1.1.10)

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

**证明** 和推导多圆柱区域$D^n(z^0,r)$上的 Cauchy 公式(1.1.7)时一样.□

$C^n$ 空间中不同区域上的全纯函数有不同形式的积分表示，关于多复变函数的积分表示的进一步讨论，将在第四章和第五章中进行.

**推论 1.1.1** 从公式(1.1.10)两边，就 $z_1,\cdots,z_n$ 逐次地取偏导数，就得公式

(1.1.11)
$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f(z_1,z_2,\cdots,z_n)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}\cdots\partial z_n^{k_n}}$$
$$=\frac{k_1!\cdots k_n!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_1}\frac{d\zeta_1}{(\zeta_1-z_1)^{k_1+1}}\cdots\int_{\partial D_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)d\zeta_n}{(\zeta_n-z_n)^{k_n+1}}$$

右边的结果，是在积分号下取导数所得的，其运算过程与一元函数的 Cauchy 积分的情况相同.

从公式(1.1.11)可知，全纯函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 的偏导数与其求导数的次序无关，而且每一个偏导数都在 $(D_1,\cdots,D_n)$ 中全纯.

**推论 1.1.2 Cauchy 不等式(或估值式)**

设 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 在闭多圆柱域 $\bar{D}^n(o,r)$ 上全纯，$r=(r_1,\cdots,r_n)$，且 $|f(z)|\leqslant M$，则

(1.1.12)
$$\left|\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(0,\cdots,0)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}\right|\leqslant\frac{k_1!\cdots k_n!}{r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}}M.$$

证明和单复变量的情形类似.

值得注意的是 Cauchy 公式(1.1.10)将函数 $f(z)$ 在 $2n$ 维区域 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 上的数值用它在 $n$ 维可定向流形 $\Gamma=\partial D_1\times\partial D_2\times\cdots\times\partial D_n$ 上的数值表示，即它和单复变量的情形不同，*Cauchy* 公式(1.1.10)的积分并非沿着整个广义多圆柱的边界进行的，而是沿边界的一部分即可定向流形 $\Gamma$ 上进行的. 注意 $D$ 的整个边界 $\partial D$ 由以下的点组成

$z_\alpha\in\partial D_\alpha,(z_1,\cdots,z_{\alpha-1},z_{\alpha+1},\cdots,z_n)\in\bar{D}_1\times\cdots\times\bar{D}_{\alpha-1}\times\bar{D}_{\alpha+1}\times\cdots\times\bar{D}_n,\alpha=1,2,\cdots,n.$

曲面 $\Gamma$ 称为广义多圆柱域的**特征流形**，不难证明它有下述重要性质：

**定理 1.1.3** 若 $f(z)$ 在广义多圆柱域 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ 上全纯，且在 $\overline{D}$ 仍然连续，则 $|f(z)|$ 在 $D$ 的特征流形 $\Gamma = \partial D_1 \times \cdots \times \partial D_n$ 上达到其最大值.

证明. 参考钟同德[1986].

根据以上的考虑我们得到以下的

**定义 1.1.5 特征流形** 特征流形 $\Gamma$ 是 $D$ 域的边界上的一部分，凡在 $D$ 内全纯在 $\overline{D}$ 连续的函数都在 $\Gamma$ 上取极大绝对值，这种特征流形有时称为区域 $D$ 的 щилов 边界.

特征流形由域 $D$ 的几何结构确定. 参见 S. Bergman[1931] 或 Б. А. фукс[1963] 第三章 § 15.

### 1.1.5 全纯函数的一些简单性质

由全纯函数的定义 1.1.3，我们可以很容易地推出下面两个定理，它们都是全纯函数的重要性质.

**定理 1.1.4 Liouville 定理** 设 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 在 $|z_k| < \infty, (k = 1, 2, \cdots, n)$ 内全纯，并且是有界的，即有 $M$ 存在，使对一切有限点 $(z_1, \cdots, z_n)$ 都有 $|f(z_1, \cdots, z_n)| < M$，则

$$f(z_1, \cdots, z_n) \equiv \text{常数}.$$

**证明** 由定义 1.1.3

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum \frac{1}{\alpha_1 ! \cdots \alpha_n !} \left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \right)_0 z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

因为 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 在 $|z_k| \leqslant r_k$ 内全纯，故由 *Cauchy* 的估值式，

$$\left| \frac{1}{\alpha_1 ! \cdots \alpha_n !} \left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \right)_0 \right| \leqslant \frac{M}{r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}}.$$

现令 $r_k \to \infty, (k = 1, 2, \cdots, n)$，故对于 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 0$ 都有

$$\left( \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \right)_0 = 0,$$

故 $$f(z_1, \cdots, z_n) \equiv \text{常数}. \square$$

**定理 1.1.5 Taylor 级数唯一性定理** 设 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 在区域

$D$ 内全纯，如果在 $D$ 内的某一点 $(z_1^0,\cdots,z_n^0)$，$f$ 和它的所有偏导数都为 0，则在 $D$ 内 $f(z_1,\cdots,z_n)\equiv 0$.

证明和一元函数的情形一样，兹从略.

**定理 1.1.6　全纯函数唯一性定理**　若 $f(z)$ 在域 $D$ 全纯，在域 $D$ 中一非空子集上为零，则 $f(z)$ 在 $D$ 恒等于零.

**证明**　实际上，$f(z)$ 最少在一包含于 $D$ 的多圆柱 $D^n(a,r)$ 内恒等于零. 如果 $b$ 是 $D$ 的任一点，可以用 $D$ 中的一曲线与 $a$ 点相联，而以有限个包含于 $D$ 的多圆柱盖过此曲线，则 $f(b)$ 亦必须等于零，这只要我们证明，在一多圆柱全纯的函数若在一非空开子集上为零则恒等于零. 后者由 Taylor 级数的唯一性即可证明. □

**定理 1.1.7　极大模原理**　如果 $f(z_1,\cdots,z_n)\neq$ 常数，在区域 $D$ 内全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，那末 $|f(z_1,\cdots,z_n)|$ 只能在 $D$ 的边界上取最大值.

**证明**　实际上只要证明，如果 $|f(z)|$ 在 $D$ 的一点 $a$ 达到其极值，则 $f(z)$ 在 $D$ 为常数. 根据定理 1.1.6，这只要证明 $|f(z)|$ 在一包含于 $D$ 的多圆柱 $D^n(a,r)$ 为常数便可. 设 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 为 $D^n(a,r)$ 的任一点，据假设，$|f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)|\geqslant|f(a_1,\cdots,a_{n-1},z_n)|$，当 $|z_n-a_n|<r_n$. 应用单复变函数的极大模原理知，$f(a_1,\cdots,a_{n-1},z_n)$ 为常数，故有 $f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)=f(a_1,\cdots,a_{n-1},b_n)$. 再应用极大模原理于单复变数函数 $f(a_1,\cdots,a_{n-2},z_{n-1},b_n)$ 可知，$f(a_1,\cdots,a_{n-2},b_{n-1},b_n)=f(a_1,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},b_n)$. 如此继续，最后得出 $f(a_1,\cdots,a_n)=f(b_1,\cdots,b_n)$，故 $f(z)$ 在 $D^n(a,r)$ 为常数. □

### 1.1.6　复合函数的全纯性

**定理 1.1.8**　假设函数 $f(z)$ 在区域 $D\subset C^n$ 全纯，函数 $z_j(\xi)$，$j=1,2,\cdots,n$ 在区域 $\Omega\subset C^m$ 全纯. 假设向量函数 $z(\xi)$ 的值域，当 $\xi$ 跑遍 $\Omega$ 时，在区域 $D$ 中，那末函数 $f[z(\xi)]$ 在 $\Omega$ 全纯.

**证明**　事实上设 $\xi^0\in\Omega$. 那么 $z(\xi^0)\in D$ 且幂级数

(1.1.13)
$$f(z)=\sum_{|\alpha|\geq 0}a_\alpha[z-z(\xi^0)]^\alpha$$

在某一多圆柱域 $D^n[z(\xi^0),r]$ 绝对收敛. 再者,可以找到一多圆柱域 $D^m(\xi^0,\sigma)$,使得 $z(\xi)\in D^n[z(\xi^0),r]$,对所有的 $\xi\in D^m(\xi^0,\sigma)$ 并且 *Taylor* 级数

(1.1.14)
$$z_j(\xi)=z_j(\xi^0)+\sum_{|\beta|\geq 1}b_\beta^{(j)}(\xi-\xi^0)^\beta,j=1,2,\cdots,n$$

在这个多圆柱域内绝对收敛. 将绝对收敛的级数(1.1.14) 代入绝对收敛级数(1.1.13) 就得到一个新的幂级数,它在 $D^m(\xi^0,\delta)$ 中绝对收敛并在这个多圆柱域中和函数 $f[z(\xi)]$ 一致.

函数 $f[z(\xi)]$ 的全纯性是容易证明的. 事实上,利用 Cauchy-Riemann 方程(1.1.2) 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{\xi}_k}=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial\bar{\xi}_k}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\bar{z}_j}{\partial\bar{\xi}_k}\right)=0,k=1,2,\cdots,m.\square$$

### 1.1.7 隐函数存在定理

我们先介绍一个关于多复变数的函数行列式的常用关系式.

**定理 1.1.9** 若 $f_\alpha(z)=u_\alpha(x,y)+iv_\alpha(x,y),\alpha=1,\cdots,n$,是 $z$ 的全纯函数,则有如下的函数行列式的关系

(1.1.15)
$$det\frac{\partial(u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)}=|det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}|^2.$$

在此 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ 表示函数方阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\partial f_2}{\partial z_n}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{bmatrix}$$

而 $detA$ 表示一方阵 $A$ 的行列式.

**证明** 应用 Cauchy-Riemann 方程，经计算可得矩阵关系式

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & -iI \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} & \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} \\ \dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} & \dfrac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)} & 0 \\ 0 & \overline{\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}} \end{bmatrix}.$$

其中 $I$ 表示 $n \times n$ 么方阵，由此立得定理. □

由此定理可得

**定理 1.1.10 隐函数存在定理** 设函数 $f_\alpha(z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_m)(\alpha = 1,\cdots,n)$ 是 $m+n$ 个复变量 $z = (z_1,\cdots,z_n), w = (w_1,\cdots,w_m)$ 的在 $z = a = (a_1,\cdots,a_n), w = b = (b_1,\cdots,b_m)$ 的邻域全纯的 $n$ 个函数，若 $f_\alpha(a,b) = 0(\alpha = 1,\cdots,n)$ 且

$$\left[det\,\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right]_{z=a,w=b} \neq 0,$$

则函数方程

(1.1.16) $\quad f_\alpha(z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_m) = 0, \alpha = 1,\cdots,n$

有唯一的解.

$$z_\alpha = g_\alpha(w_1,\cdots,w_m), \alpha = 1,\cdots,n,$$

并且此解在 $C^m$ 中的一 $w = b$ 的邻域全纯，此外 $g_\alpha(b) = a_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,n)$.

**证明** 命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, f_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha(\alpha = 1,\cdots,n)$ 及 $w_k = \xi_k + i\eta_k(k = 1,\cdots,m)$，据假设及定理 1.1.9 知

$$\left[det\,\frac{\partial(u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)}\right]_{z=a,w=b} \neq 0,$$

由实变量的隐函数存在定理，方程(1.1.16) 有唯一的解

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(\xi,\eta), y_\alpha = \psi_\alpha(\xi,\eta), \alpha = 1,2,\cdots,m,$$

其中 $\varphi_\alpha$ 与 $\psi_\alpha$ 是实变量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m),\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 的在 $w=b$ 点邻域的实解析函数

命 $z_\alpha=\varphi_\alpha+i\psi_\alpha$，在(1.1.16)中对 $\overline{w_k}$ 取偏导数，有

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial w_\beta}\frac{\partial w_\beta}{\partial \overline{w_k}}+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial \overline{w_k}}=0,$$

由于 $\frac{\partial w_\beta}{\partial \overline{w_\beta}}=0$，我们得到

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial \overline{w_k}}=0.$$

由于 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ 在 $z=a,w=b$ 点有一邻域不为零，据齐次线性方程的理论知，在 $w=b$ 的邻域必须

$$\frac{\partial z_\beta}{\partial \overline{w_k}}=0.$$

这表示 $z_\alpha=g_\alpha(w)$ 是 $w$ 的在 $w=b$ 的一邻域中全纯的函数，定理证明. □

### 1.1.8 Weierstrass 预备定理

本节我们介绍下述著名的

**定理 1.1.11 Weierstrass 预备定理**设 $F(z,w)$ 在区域：$|z-z_0|<r,|w-w_0|<\rho$ 内全纯，且

$$F(z_0,w_0)=0,F(z_0,w)\not\equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}F(z_0,w_0)=0,\cdots,\frac{\partial^{k-1}F(z_0,w_0)}{\partial w^{k-1}}=0 \text{ 而} \frac{\partial^k F(z_0,w_0)}{\partial w^k}\neq 0.$$

则存在邻域：$|z-z_0|<r'<r,|w-w_0|<\rho'<\rho$，在其中 $F(z,w)$ 可表为下式：

$$F(z,w)=[A_0(z)+A_1(z)w+\cdots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w^k]\phi(z,w),$$

其中 $A_0(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 都在区域 $|z-z_0|<r'$ 内全纯，$\phi(z,w)$ 在邻域：$|z-z_0|<r',|w-w_0|<\rho'$ 中全纯，且不为零.

本定理的应用很多，例如应用在隐函数理论，凝聚层理论等.本定理是把在一个特解$(z_0,w_0)$的邻域内全纯的一般隐函数方程

$$F(z,w)=0 \tag{1.1.16}$$

化为一个等价的 $w$ 的代数方程：

$$A_0(z)+A_1(z)w+\cdots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w=0. \tag{1.1.17}$$

表达式 $A_0(z)+A_1(z)w+\cdots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w^k$ 称为以 $z_0$ 为中心的**特征拟多项式**.

读者不难把本定理推广到 $n$ 个复变量的情形.

**证明** 定理的证明分为三步：

1) 首先建立$(z_0,w_0)$的某一个邻域，使方程(1.1.16)在其中有 $k$ 个解.

由假设$\frac{\partial}{\partial w}F(z_0,w_0)=0,\cdots,\frac{\partial^{k-1}F(z_0,w_0)}{\partial w^{k-1}}=0$，而$\frac{\partial^k F(z_0,w_0)}{\partial w^k}\neq 0(k\geqslant 1)$. 故函数 $F(z_0,w_0)$ 有 $k$ 重零点 $w_0$，因为零点是孤立的，可取 $w_0$ 的适当小的邻域：$|w-w_0|\leqslant\rho'<\rho$，使 $F(z_0,w)$ 在其中除 $w_0$ 外无其它零点. 在圆周 $\Gamma$：$|w-w_0|=\rho'$ 上. 命

$$|F(z_0,w)|\geqslant m.$$

另一方面，取 $z_0$ 的充分小的邻域 $|z-z_0|\leqslant r'<r$，使对于其中任何的 $z$ 以及对于任何的 $w\in\Gamma$，都有(因为 $F(z,w)$ 在 $|z-z_0|<r$，$|w-w_0|<\rho$ 全纯，故关于 $z$ 连续)

$$|F(z,w)-F(z_0,w)|<m,$$

故由 Rouche′ 定理，两个方程

$F(z_0,w)=0$ 与 $F(z_0,w)+[F(z,w)-F(z_0,w)]=F(z,w)=0$，当固定 $z$ 于 $|z-z_0|\leqslant r'$ 时，在 $\Gamma$ 的内部，应有相同个数的根，即 $F(z,w)=0$ 有关于 $w$ 的 $k$ 个根.

命 $w_j(z)(j=1,\cdots,k)$ 表这些根. 另作一个也以 $w_j(z)$ 为零点的多项式

$$\prod_{j=1}^{k}(w-w_j)=w^k-[w_1(z)+\cdots+w_k(z)]w^{k-1} \tag{1.1.18}$$

$$+[w_1(z)w_2(z)+\cdots+w_{k-1}(z)w_k(z)]w^{k-2}$$
$$-\cdots+(-1)^k w_1(z)\cdots w_k(z)$$
$$=w^k+A_{k-1}w^{k-1}+\cdots+A_0(z)=P(z,w).$$

2) 其次，我们要证明(1.1.18)中所有的系数 $A_j(z)$ 都在 $|z-z_0|<r'$ 内全纯.

设

$$S_m(z)=w_1^m(z)+\cdots+w_k^m(z),m\geqslant 1,$$

则有关系式

$$S_m+S_{m-1}A_{k-1}+S_{m-2}A_{k-2}+mA_{k-m}=0,m\geqslant 1,$$

故每一个 $A_j(z)$ 都可以表示为 $S_m$ 的多项式，例如：

$$A_{k-1}(z)=-S_1(z),A_{k-2}(z)=\frac{1}{2}[S_1(z)]^2-\frac{1}{2}S_2(z),\cdots$$

故只须证明 $S_m(z)$ 在 $|z-z_0|<r'$ 内的全纯性就够了. 固定 $|z-z_0|\leqslant r'$. 考虑积分

$$(1.1.19)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma w^m\frac{\frac{\partial F(z,w)}{\partial w}}{F(z,w)}dw=w_1^m(z)+\cdots+w_k^m(z)=S_m(z),$$

把它看成含参数 $z$ 的积分，当固定 $w$ 于 $\Gamma$ 上时，$F(z,w)$ 与 $\frac{\partial F(z,w)}{\partial w}$ 在 $|z-z_0|<r'$ 内，都为 $z$ 的全纯函数，且 $F(z,w)\neq 0$. 后者是因为当 $|w-w_0|=\rho'$ 且 $|z-z_0|\leqslant r'$ 时，已如前述，$|F(z_0,w)|\geqslant m$，而 $|F(z,w)-F(z_0,w)|<m$，于是

$$|F(z,w)|\geqslant-|F(z,w)-F(z_0,w)|+|F(z_0,w)|>m-m=0.$$

故(1.1.19)中的被积函数 $w^m\frac{\frac{\partial F(z,w)}{\partial w}}{F(z,w)}$ 在 $|z-z_0|<r'$ 内全纯，且在区域 $|z-z_0|\leqslant r',|w-w_0|=\rho'$ 上是连续的，故 $S_m(z)$，因而 $A_j(z)$ 都是在 $|z-z_0|<r'$ 内是全纯的.

3) 最后，我们来证明商 $\Phi(z,w)=\frac{F(z,w)}{P(z,w)}$ 在域 $|z-z_0|<r'$, $|w-w_0|<\rho'$ 内是 $(z,w)$ 的全纯函数，并且不为零. 为了这个目

的，我们分成三个步骤进行：

($i$) 由 1)，当 $z$ 固定于 $|z-z_0|<r'$ 内时，$F(z,w)$ 与 $P(z,w)$ 在 $|w-w_0|<\rho'$ 内部都为全纯函数，且有相同的零点 $w_j(z)(j=1,\cdots,k)$. 因此，对任何属于 $|z-z_0|<r'$ 的 $z$，$\Phi(z,w)$ 在 $|w-w_0|<\rho'$ 内为 $w$ 的全纯函数，且不为零.

($ii$) 因为由 1)，在 $|z-z_0|<r'$ 内，$F(z,w)=0$ 的根，亦即 $P(z,w)$ 的零点 $w_j(z)$，都在 $|w-w_0|<\rho'$ 内，故当 $|z-z_0|<r'$，$|w-w_0|=\rho'$ 时，$P(z,w)\neq 0$. 由 2) 知 $A_j(z)$ 在 $|z-z_0|<r'$ 内全纯，故 $A_j(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant r''(0<r''<r')$ 上是连续的，因而 $P(z,w)$ 在闭域 $|z-z_0|\leqslant r''$，$|w-w_0|\leqslant\rho'$ 上连续. 注意到 $P(z,w)$ 在 $|w-w_0|<\rho'$ 内有零点，故存在一个窄环 $\rho_1\leqslant|w-w_0|\leqslant\rho'$，使得在闭集 $|z-z_0|\leqslant r'$，$\rho_1\leqslant|w-w_0|\leqslant\rho'$ 上，有 $P(z,w)\neq 0$.

取 $\rho''$ 为满足 $\rho_1<\rho''<\rho'$ 的任一数，并考虑当 $|z-z_0|\leqslant r''$，$|w-w_0|<\rho''$ 时的函数

$$(1.1.20)\qquad \Phi(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau-w_0|=\rho''}\frac{\Phi(z,\tau)}{\tau-w}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau-w_0|=\rho''}\frac{F(z,\tau)}{P(z,\tau)(\tau-w)}d\tau,$$

当 $\tau$ 与 $w$ 固定时，$\dfrac{F(z,\tau)}{P(z,\tau)(\tau-w)}$ 是在 $|z-z_0|\leqslant r''$ 内的 $z$ 的二个全纯函数的商，且 $P(z,\tau)\neq 0$，因而也是 $z$ 的全纯函数，故 $\Phi(z,w)$ 当固定 $w$ 于 $|w-w_0|<\rho''$ 内时是在 $|z-z_0|<r''$ 内 $z$ 的全纯函数.

($iii$) 由($i$)($ii$)根据全纯函数的定义 1.1.1 即知函数 $\Phi(z,w)$ 在域 $|z-z_0|<r''$，$|w-w_0|<\rho''$ 内是$(z,w)$ 的全纯函数，且不为零.

命 $r''\to r'\ \rho''\to\rho'$ 即得到 Weierstrass 定理的证明. □

## § 1.2 扩充空间和无穷远点的全纯函数

### 1.2.1 $C^n$ 的扩充空间

熟知，将复变数 $z$ 平面 $C^1$ 补充无穷远点是籍助测地投影. 测地投影是将实变数 $x^1, x^2, t$ 空间 $R^3$ 中的单位球面 $Q_2\{(x^1)^2+(x^2)^2+t^2=1\}$ 映照到平面 $C^1$.

我们在平面 $C^1$ 上引进齐次坐标 $\zeta_1, \zeta_2$，命

(1.2.1) $\quad z=\dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}$，其中 $|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2 \neq 0$.

齐次坐标的每一对数值决定平面 $C^1$ 上的一点，除了数值 $\zeta_1 \neq 0, \zeta_2=0$ 以外(它不与 $C^1$ 平面上的任何点对应).

借助齐次坐标，测地投影可用等式

(1.2.2)
$$x^1+ix^2=x=\frac{1}{N}2\zeta_1\bar{\zeta}_2=\frac{2z}{|z|^2+1};$$
$$t=\frac{1}{N}(|\zeta_1|^2-|\zeta_2|^2)=\frac{|z|^2-1}{|z|+1}$$

表示，其中 $N=|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2$；公式(1.2.2)的最后一项只当 $\zeta_2 \neq 0$. 时有意义

从等式(1.2.2)可以看到齐次坐标的数值 $\zeta_1 \neq 0, \zeta_2=0$ 与球面 $Q_2$ 上的北极 $(0,0,1)$ 对应，另一方面，坐标 $\zeta_1, \zeta_2$ 的这种数值不与平面 $C^1$ 上的任何点对应，因此不与任何(有限)的复数 $z$ 对应. 因此，我们引进新的复数 $z=\infty$，作为球面 $Q_2$ 上点 $(0,0,1)$ 的(仿射)坐标.

复变量 Z 平面在变换(1.2.2)下，以球面 $Q_2$ 除了点 $(0,0,1)$ 为象. 引进新数 $z=\infty$ 补充这象集使之成为**完备集** —— 整个球面 $Q_2$. 这称为复变量 $z$ 的黎曼球面.

然后引进在点 $z=\infty$ 全纯的函数的概念. 函数 $f(z)$ 称为在点

$z=\infty$ 全纯，如果函数 $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$（其中 $a,b,c,d$ 为一些数，满足 $c\neq 0$，$ad-bc\neq 0$）在点 $z=-\frac{d}{c}$ 全纯．在此 $a,b,c,d$ 的选择没有区别，由于射影变换

$$Z=\begin{cases}\dfrac{az+b}{cz+d} & \text{当 } z\neq -\dfrac{d}{c}\\[2ex] \infty & \text{当 } z=-\dfrac{d}{c}\end{cases}\tag{1.2.3}$$

构成黎曼球 $Q_2$ 到自身的保角变换群.

现在考虑 $z_1,z_2$ 空间 $C^2$ 中通过原点的解析平面束 $\pi^1:\Omega=\{\zeta_1 z_2-\zeta_2 z_1=0\}$. 在这种情形引进拓扑：平面 $\Omega_0\in\pi^1$ 的 $\varepsilon$ — 邻域理解为角 $\measuredangle(\Omega_0,\Omega)$ 不超过 $\varepsilon>0$ 的平面 $\Omega\in\pi^1$ 的全体. 平面束 $\pi^1$，适当引进拓扑后称为**一维复射影空间** $P^1$. 关系式(1.2.2)(由测地投影给出的)建立了平面束 $\pi^1$ 中平面 $\Omega$(由它的系数 $\zeta_1,\zeta_2$ 决定)与球 $Q_2$ 的点之间的对应关系. 我们可以证明它表示空间 $P^1$ 到空间 $R_3$ 的一个正则对应，即它是：1) 双方单值的与 2) 局部正则的，即在 $\pi^1$ 上到处有

$$\operatorname{Rang}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial\eta_1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\eta_1} & \dfrac{\partial t}{\partial\eta_1}\\[2ex] \dfrac{\partial x^1}{\partial\eta_2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial\eta_2} & \dfrac{\partial t}{\partial\eta_2}\end{bmatrix}=2\tag{1.2.4}$$

其中 $\eta_1,\eta_2$ 为平面 $\Omega\in\pi^1$ 的局部坐标. 这个局部坐标是在一些平面 $\Omega',\Omega'',\cdots\in\pi^1$ 的邻域中引进的；这个邻域的全体要取尽平面 $\pi^1$ 的全部. 不妨设 $0\leqslant\measuredangle(\Omega_1,\Omega_2)\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\Omega_1,\Omega_2\in\pi^1$.

为了验证性质(1.2.4)对(1.2.2)成立，我们只要在平面 $\Omega'=\{z_1=0\}$（对于它 $\zeta_1=0,\zeta_2\neq 0$）和 $\Omega''=\{z_2=0\}$（对于它 $\zeta_1\neq 0$，$\zeta_2=0$）的邻域引进局部坐标，平面 $\Omega'$ 和 $\Omega''$ 是由条件 $\measuredangle(\Omega',\Omega)<\frac{\pi}{3}$，$\measuredangle(\Omega'',\Omega)<\frac{\pi}{3}$ 定义的（由于 $\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{2}$，所以这个邻域取尽平面

束 $\pi^1$ 的全部). 在第一个邻域命 $\eta_1 + i\eta_2 = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$,在第二个命 $\eta_1 + i\eta_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$. 从此立知等式(1.2.4)为真.

交换(1.2.2)的单值性可直接看出,逆变换的单值性可由在对应邻域中解局部坐标 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 的单值性看出.

由此证明了变换(1.2.2)定义空间 $P^1$ 到空间 $R_3$(看成球面 $Q_2$)的正则对应.

为了将平面补充无穷远点的步骤给予几何解释,我们可以将黎曼球面 $Q_2$ 代以其它任意一个正则对应的空间 $P^1$,特别是空间 $P^1$ 本身. 由于在平面束 $\pi^1$ 中我们把平面 $z_2 = 0$(它不与任何有限的 $z$ 对应)和数 $z = \infty$ 对应起来.

考虑平面 $\Omega_1, \Omega_2 \in \pi^1$,对应地有点 $w_1, w_2 \in Q_2$,又由等式(1.2.1),(1.2.2)对应两个复数 $z = \frac{\zeta_1^{(1)}}{\zeta_2^{(1)}}, z_2 = \frac{\zeta_1^{(2)}}{\zeta_2^{(2)}}$(当 $\zeta_2^{(1)} = 0, z_1 = \infty$;当 $\zeta_2^{(2)} = 0, z_2 = \infty$). 由此,适当计算可以证明

(1.2.5) $$\sin(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\chi(z_1, z_2) = \frac{|\zeta_1^{(2)}\zeta_2^{(1)} - \zeta_2^{(2)}\zeta_1^{(1)}|}{\sqrt{|\zeta_1^{(1)}|^2 + |\zeta_2^{(1)}|^2}\sqrt{|\zeta_1^{(2)}|^2 + |\zeta_2^{(2)}|^2}} = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}\sqrt{|z_2|^2 + 1}}$$

(最后的表达式只当 $z_1, z_2 \neq \infty$ 时适用). 在此 $\sin(z_1, z_2)$ 表示平面 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 间的交角正弦,设 $0 \leqslant \measuredangle(\Omega_1, \Omega_2) \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\chi(z_1, z_2)$ 表示球面 $Q_2$ 上两点 $w_1$ 和 $w_2$ 和间的弦长. 关系式(1.2.5)表示平面 $\Omega \in \pi^1$ 的邻域与点 $w \in Q_2$ 间的一个显明对应关系.

量 $\chi(z_1, z_2)$ 是 Carathèodory 引进的[①]称为点 $z_1, z_2$ 间的**弦距离**(点 $z_1, z_2$ 可理解为与黎曼球 $Q_2$ 上的点对应,或与平面 $\pi^1$ 上的点对

---

① 见 Carathèodory, Funktionen theorie, Band 1, Basel 1950, 第 91 页.

应，或与空间 $P^1$ 的其它某一实现的元素对应）. 条件 $\lim_{n\to\infty} z_n = A$ 或 $\lim_{n\to\infty} x(A, z_n) = 0$ 不必分别考虑无穷极限和有限极限的情形（它与通常的极限定义一样）.

### 1.2.2 $C^n$ 的扩充空间

在 $C^n$ 空间的情形可仿照前面 $C^1$ 平面的扩充方法得到 $C^n$ 的扩充空间 $P^n$（参考 Б、А、Фукс[1962]）. 下面我们介绍另一个扩充空间的方法，称为**函数论空间**.

我们考虑复变量 $z_k$ 的平面 $C_k^1$ 并用前面的方法把它扩充为空间 $P_k^1$. 然后我们作这些空间的乘积 $P_1^1 \times \cdots \times P_n^1$. 熟知每一个空间 $P_k^1$ 我们都可以看成是对变量 $z_k$ 所做的球面 $Q_2^{(k)}$，这些球面的乘积表示一完备集，包含变量 $z_1, \cdots, z_n$ 的空间 $C^n$ 作为子集（确切地说，它包含由黎曼球面去掉 $z_k = \infty$ 的拓扑积所成的空间作为子集）. 我们称 $P_1^1 \times \cdots \times P_n^1$ 为**函数论空间** $G^n$. 在其中每一紧致一维解析平面 $z_k = z_k^0 (k \neq \nu)$ 都有无穷远点，我们记做 $(z_1^0, \cdots, z_{\nu-1}^0, \infty, z_{\nu-1}^0, \cdots, z_n^0)$. 每一复二维解析平面 $z_k = z_k^0 (k \neq \nu, \mu)$ 除了前面所说的外都还有一无穷远点，当 $\nu = 1, \mu = 2$ 时记做 $(\infty, \infty, z_3^0, \cdots, z_n^0)$ 等等.

为了扩充函数在空间 $G^n$ 的无穷远点全纯的概念，我们利用在每一个复变量 $z_k$ 的球面 $Q_2^{(k)}$ 上的变换(1.2.3). 结果我们得到下面的定义.

**定义 1.2.1　在空间 $G^n$ 的无穷远点全纯的定义**

函数 $w = f(\zeta)$（其中 $\zeta \in G^n, w \in C^n$）称为在无穷远点 $\eta \in G^n$ 全纯，如果函数

$$f\left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \cdots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n}\right)$$

（其中 $a_k d_k - c_k b_k \neq 0$ 对所有 $k = 1, \cdots, n$）在对应的有限点 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in C^n$ 全纯.

无穷远点 $\eta \in G^n$ 是所有或部分的分母 $c_k z_k + d_k$ 为零所对应的

点.注意在此我们不必考虑最一般的变换(1.2.3).象前面的情形一样,在此只要考虑比较特殊的形式.在下一段我们来应用它.

### 1.2.3 Laurent 展开式

为简单计我们只考虑二个复变量 $w,z$ 的情形.为了研究函数 $f(w,z)$ 在无穷远点的性质,只要考虑形如(1.2.3)的变换:

$$W = w,\quad Z = \frac{1}{z},\quad W = \frac{1}{w},\quad Z = z; \tag{1.2.6}$$

$$W = \frac{1}{w},\quad Z = \frac{1}{z},$$

它们把点$(a,0)$,$(0,a)$和$(0,0)$相应的变到 $G^2$ 空间中的点$(a,\infty)$,$(\infty,a)$和$(\infty,\infty)$去.函数$f(w,z)$称为在这些无穷远点全纯,若函数 $f(w,\frac{1}{z})$;$f(\frac{1}{w},z)$,$f(\frac{1}{w},\frac{1}{z})$ 在相应的点$(a,0)$,$(0,a)$,$(0,0)$全纯.将变换(1.2.6)应用到函数$f(w,z)$在点$(a,0)$,$(0,a)$,$(0,0)$的邻域中的二重 Taylor 级数展开式,我们就可以得到函数在无穷远点全纯的条件如下:

"函数$f(w,z)$在点$(a,\infty)$全纯"意即存在一双圆柱域$\{|w-a|<R,|z|>\frac{1}{R}\}$(当 $R$ 取充分大的数值时,这区域表示无穷远点的一邻域),函数$f(w,z)$在其中表成级数

$$f(w,z) = \sum_{k,l=0} a_{kl}(w-a)^k\frac{1}{z^l}. \tag{1.2.7}$$

同理对点$(\infty,a)$和$(\infty,\infty)$分别存在一双圆柱域$\{|w|>\frac{1}{R},|z-a|<R\}$,$\{|w|>\frac{1}{R},|z|>\frac{1}{R}\}$,在其中

$$f(w,z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\frac{1}{w^k}(z-a)^l;$$

(1.2.7′)

$$f(w,z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\frac{1}{w^k}\frac{1}{z^l}.$$

注意级数(1.2.7)和类似的级数象经典函数论一样可以看成罗朗展开式的特例.

上述情况的Laurent展开式可如下得到. 设函数$f(w,z)$在双圆柱域$D=D_1\times D_2$全纯(其中$D_1,D_2$为平面上由$r_1<|w|<R_1, r_2<|z|<R_2$定义的圆柱),在闭区域$\overline{D}$上连续. 那末若$C_1,C_2$为范围圆环$D_1$的圆周,$\Gamma_1,\Gamma_2$为范围环$D_2$的圆周,那末对区域$D$中的每一点$(w,z)$我们都有:

$$(1.2.8)\qquad f(w,z) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{c_1^-}\frac{dt_1}{t_1-w}\int_{\Gamma_1^-}\frac{f(t_1,t_2)}{t_2-z}dt_2 - \frac{1}{4\pi^2}\int_{c_1^-}\frac{dt_1}{t_1-w}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,t_2)}{t_2-z}dt_2 - \frac{1}{4\pi^2}\int_{c_2}\frac{dt_1}{t_1-w}\int_{\Gamma_1^-}\frac{f(t_1,t_2)}{t_2-z}dt_2 - \frac{1}{4\pi^2}\int_{c_2}\frac{dt_1}{t_1-w}\int_{\Gamma_2}\frac{f(t_1,t_2)}{t_2-z}dt_2.$$

由所得积分可以得到关于$w,z$的正负幂展开的级数,由此得到$f(w,z)$在$D$的Laurent展开式:

$$(1.2.9)\qquad f(w,z)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty}a_{kl}w^kz^l.$$

特别,如果函数$f(w,z)$在圆$|w|=r_1, |z|=r_2$的内部全纯,则级数(1.2.9)无负次幂,即可写成二重Taylor级数

$$(1.2.10)\qquad f(w,z)=\sum_{k,l=0}^{\infty}a_{kl}w^kz^l$$

的形式. 级数(1.2.9)可以看做形如

$$(1.2.11)\qquad f(w,z)=\sum_{k,l=0}^{\infty}a_{kl}(w-a_1)^k(z-a_2)^l,$$

(1.2.7)和类似的展开式的和,它在它们的公共收敛区域上表示函数$f(w,z)$.

# § 1.3 全纯开拓 Hartogs 现象

### 1.3.1 全纯开拓

假设 $D$ 和 $D_0$ 是 $P^n$ 或 $G^n$ 空间中的区域，而且 $D_0 \subset D$. 如果 $f_0$ 和 $f$ 是区域 $D_0$ 和 $D$ 上的全纯函数元素而且对区域 $D_0$ 上的点 $f_0 = f$，那末函数 $f$ 称为函数 $f_0$ **从区域 $D_0$ 到区域 $D$ 的全纯开拓**.

设区域 $D_0$ 和 $D_1$ 相交于某一区域 $G_0$ 且在区域 $D = D_0 \cup D_1$ 存在全纯函数元素 $f$，它是定义在区域 $D_0$ 的函数 $f_0$ 和定义在区域 $D_1$ 的函数 $f_1$ 的全纯开拓，那末函数 $f_1$ 称为**函数 $f_0$ 在区域 $D_1$ 的直接全纯开拓**. 由直接全纯开拓的唯一性定理可知是单值的.

现在考虑区域 $D_0, D_1, \cdots, D_m$. 设区域 $D_k$ 和 $D_{k+1}$ 相交于非空区域 $G_k(k = 0,1,\cdots,m-1)$. 设 $f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是分别定义在区域 $D_0,\cdots,D_m$ 上的全纯函数元素，又元素 $f_{k+1}$ 是元素 $f_k$ 在区域 $D_{k+1}$ 上的直接全纯开拓. 这时我们称函数 $f_m$ 为全纯函数元素 $f_0$ 在区域 $D_m$ 上的**全纯开拓**，元素 $f_0$ 和 $f_m$ 是**互相联结的**. 元素 $f_k$ 和 $f_{k+1}$（对所有 $k = 0,1,\cdots,m-1$,）是**互相联结的**. 立知若改变中间区域 $D_1,\cdots,D_{m-1}$ 那末 $D_m$ 上所得到的元素 $f_0$ 的全纯开拓函数元素将与 $f_m$ 不同. 因此直接全纯开拓的单值性在一般情况下不成立.

### 1.3.2 非齐次 Cauchy-Riemann 方程和非齐次 Cauchy 公式

在区域 $D$ 上连续的函数类记为 $C(D)$. 将区域 $D$(或紧集 $K$) 上所有全纯函数构成的集合记作 $A(D)$(或 $A(K)$). 又 $A_c(D) = A(D) \cap C(\overline{D})$.

由定义单复变全纯函数 $u \in A(D)$，满足 Cauchy-Riemann 方程

(1.3.1) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0. \text{或} \ \bar{\partial} u = 0$$

其中 $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. 所以单复变全纯函数 $u \in A(D)$ 的研究，可以看成是

Cauchy-Riemann 方程(1.3.1)在 $C^{(1)}(D)$ 中的解的研究，在此 $C^{(1)}(D)$ 表示在区域 $D$ 上一次连续可微的函数全体. 如果 $u \in C(\overline{D})$，那末 Cauchy-Riemann 方程(1.3.1)的解 $u$ 可用 Cauchy 积分公式

(1.3.2) $$u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

表示.

方程

(1.3.3) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = g \quad 或 \quad \bar{\partial} u = g d\bar{z},$$

其中是 $g$ 闭区域 $\overline{D}$ 上的一无穷可微函数,,即 $f \in C^{\infty}(\overline{D})$，称为**非齐次** Cauchy-Riemann **方程**或 $\bar{\partial}$ — 方程. 下面我们求出它的解 $u$ 的积分公式，先证明

**定理 1.3.1** (Cauchy-Green **公式**) 设 $D$ 是复数平面 $C^1$ 上由简单可求长闭曲线 $\partial D$ 围成的有界域，又复值函数 $f \in C^{\infty}(\overline{D})$，则对 $\forall z \in D$ 有

(1.3.4) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\bar{\zeta}}{\zeta - z} + \int_{D}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right).$$

**证明** 命

(1.3.5) $$K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}d\zeta$$

这个(1、0)形式是 $C^1$ 上有界域的 Cauchy 核，易知

$$d(f(\zeta)K(\zeta,z)) = d\left(\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

命 $B_\varepsilon$ 表示以 $z$ 为中心，以充份小的 $\varepsilon > 0$ 为半径的圆盘，在 $D - B_\varepsilon$ 上对 $d(f(\zeta)K(\zeta,z))$ 应用 Stores 公式有

(1.3.6) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{D-B_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} f(z) \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

又由于 $f(\zeta)$ 在点 $z$ 连续，故对给定的 $\delta > 0$，可取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得当 $|\zeta - z| < \varepsilon$ 时，$|f(\zeta) - f(z)| < \delta$，因此

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\sup |f(\zeta) - f(z)| \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi\delta,$$

故当 $\varepsilon \to 0$ 时，(1.3.6) 右端第二个积分

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \to 0.$$

所以将(1.3.6) 对 $\varepsilon$ 取极限，即知公式(1.3.4) 成立. □

当 $f(\zeta)$ 在 $D$ 内全纯时，$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = 0$，这时(1.3.4) 式即通常的 Cauchy 积分公式.

利用上述 Cauchy-Green 公式即可得到复数平面上 $\bar{\partial}$ — 方程的解. 我们有

**定理 1.3.2** 假设 $g \in C^{(\infty)}(\overline{D})$，则

(1.3.7) $$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{g(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

是非齐次 $\bar{\partial}$ — 方程.

(1.3.8) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = g(z), \forall\, z \in D$$

的解，并且 $u \in C^{(\infty)}(D)$. (1.3.7) 称为**非齐次 Cauchy 公式**.

证明. i) 先假设 $g \in C_0^{(\infty)}(D)$，即 $g$ 在 $D$ 中有紧支集(函数在 $D$ 的紧支集是 $D$ 中的一最小闭集，函数在这闭集之外为 0)，则

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{g(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}^1} \frac{g(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{g(z+\tau)d\tau \wedge d\bar{\tau}}{\tau} \quad (\text{命 } \zeta - z = \tau)$$

因为 $g$ 具紧支集，上式可以在积分号下取微分，因此

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{\partial g(z+\tau)}{\partial \bar{z}} \frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{\tau}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \qquad (\text{命 } z + \tau = \zeta)$$

由定理 1.3.1(Cauchy-Green 公式)

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = g(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

由于 $g \in C_0^\infty(D)$，等式右端积分为零，故有

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = g(z),$$

ii) 再证一般情形. 对任意固定的 $z \in D$，取邻域 $V$，$z \in V \subset \overline{V} \subset D$. 在 $C_0^{(\infty)}(D)$ 函数中，取函数 $\psi$，满足

$$\psi|_V \equiv 1, \mathrm{Supp}\psi \subset D,$$

则 $g(z) = \psi g + (1-\psi)g$，其中 $\psi g \in C_0^\infty(D)$，$(1-\psi)g \in C^\infty(\overline{D})$，同时 $\psi g|_V = g$，$(1-\psi)g|_V \equiv 0$.

$$\text{令} u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\psi g}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{(1-\psi)g}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

由 i) 的证明知道

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} = \psi g(z) = g(z).$$

由于 $(1-\psi)g$ 在 $z$ 的邻近 $\equiv 0$，被积函数在 $z$ 的邻近是 $C^{(\infty)}$ 的，故

$$\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{(1-\psi)g}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{D-V} \frac{(1-\psi)g}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{(1-\psi)g}{\zeta - z}\right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0.$$

最后有

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = g(z), \quad z \in D. \square$$

**定理 1.3.3** 假设 $f \in C_{0,(0,1)}^{(\infty)}(C^n)$，即 $f$ 是 $C^n$ 中的 $C^{(\infty)}$ 的(0,1)形式，同时假设 $f$ 具有紧支集，并满足 $\bar{\partial} f = 0$，$\bar{\partial} = \sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$，则当 $n > 1$ 时，存在 $u \in C_0^\infty(C^n)$，满足 $\bar{\partial} u = f$.

**证明** 命 $f = \sum f_j d\bar{z}_j$，其中 $f_j \in C_0^{(\infty)}(C^n)$，则由定理 1.3.2

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{f_1,(\zeta, z_2, \cdots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

满足 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = f_1$，此外，当 $k > 1$ 时，由条件 $\bar{\partial} f = 0$，即 $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}$，$j, k = 1, \cdots, n$. 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{1}{\zeta - z_1} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_k} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{1}{\zeta - z_1} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1}(\zeta, z_2, \cdots, z_n) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= f_k(z).\end{aligned}$$

最后一等式的得到是由于定理 1.3.1(Cauchy-Grenn 公式). 因此 $u(z)$ 满足 $\bar{\partial} u = f$. 但从 $u(z)$ 的表达式可以看到，当 $|z_2| + \cdots + |z_n|$ 充分大时 $u(z) \equiv 0$，再注意到 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} = f_k$，所以在诸 $f_k$ 的支集外，$u(z)$ 是全纯的，因此，由唯一性定理知 $u(z)$ 在 $f_j$ 的支集外 $\equiv 0$，即 $u(z)$ 有紧支集. $\square$

### 1.3.3 Hautogs 现象

应用定理 1.3.3. 可以得到下述著名定理：

**定理 1.3.4** (Hartogs) 设 $D$ 是 $C^n$ 中的区域，$n > 1$，$K$ 是 $D$ 中的紧子集，$D \backslash K$ 是连通的. 那末任何一个 $f \in A(D \backslash K)$ 都可以全纯开

拓到整个 $D$. 即存在 $\tilde{f} \in A(D)$，使得 $f|_{D\setminus K} = \tilde{f}|_{D\setminus K}$. 自然，这种开拓是唯一的（F · Hartogs[1906a]）.

**证明** 任选 $\varphi \in C_0^{(\infty)}(D)$，使 $\varphi$ 在 $K$ 的一个邻域上 $\equiv 1$. 命 $f_0 = (1-\varphi)f$，则 $f_0 \in C_0^{(\infty)}(D)$，并且 $f_0 \equiv 0$ 在 $K$，$f_0 \equiv f$ 在 $D\setminus \text{supp}\varphi$.

要找 $v \in C^{(\infty)}(C^n)$，使得 $\tilde{f} = f_0 - v$ 是全纯的，则必须 $\bar{\partial}\tilde{f} = 0$，即 $\bar{\partial}v = \bar{\partial}f_0 = -f\bar{\partial}\varphi$. 而 $-f\bar{\partial}\varphi$ 在 $\text{Supp}\varphi$ 以外恒为零，即 $-f\bar{\partial}\varphi \in C_{0,1}^{(\infty)}(C^n)$ 并有紧支集. 根据定理 1.3.3，满足 $\bar{\partial}v = -f\bar{\partial}\varphi$ 的 $v$ 存在，而且在 $\text{Supp}\varphi$ 以外亦恒为零. 所以在 $\text{Supp}\varphi$ 以外，$v=0$，$\tilde{f} = f_0$，而 $\tilde{f}$ 满足 $\bar{\partial}\tilde{f} = 0$，即 $\tilde{f}$ 是全纯的，但是 $f = f_0$ 在 $D\setminus\text{Supp}\varphi$ 成立. 由于 $D\setminus K$ 是连通的，所以由唯一性定理，$\tilde{f} = f$ 在 $D\setminus K$ 成立. □

Hartogs 定理所揭示的现象，表明多复变数全纯函数与单复变数全纯函数在全纯开拓方面有本质上的不同，在多复变数中这种现象称为**Hartogs现象**. 由 Hartogs 现象引出一系列关于多复变数函数全纯开拓的研究，这种研究推动论的了多复变数函数论的发展.

有关全纯开拓的问题，将在第二章和第四章中进一步介绍.

## § 1.4　全纯映射

### 1.4.1　全纯映射

设 $D \subset C^n$ 是一开集，考虑一映射 $F: D \to C^m$. 记 $F = (f_1, \cdots, f_m)$ 及 $f_k = u_k + \sqrt{-1}v_k$，其中 $u_k = u_k(x,y)$，$v_k = v_k(x,y)$ 为 $D$ 上的实值函数，那末 $F = (u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m)$ 可以看做是 $D \subset R^{2n}$ 到 $R^{2m}$ 的映射.

映射 $F: D \to C^m$ 称为**全纯映射**，如果它的（复）分量 $f_1, \cdots, f_m$ 是 $D$ 上的全纯函数. 命

$$F'(a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a)\cdots\frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(a)\cdots\frac{\partial f_m}{\partial z_n}(a)\end{bmatrix}.$$

我们称 $F'(a)$ **为全纯映射 F 在点 a 的导数(或复 Jacobi 矩阵).**

由定理 1.1.9 立得:

**定理 1.4.1** 如 $D\subset C^n$ 且 $F:D\to C^n$ 是全纯的,那末对 $z\in D$ 有

$$(1.4.1)\quad det\,\frac{\partial(u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)}=\left|det\,\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right|^2=|detF'(z)|^2\geqslant 0$$

### 1.4.2 双全纯映射

当 $m=n$ 时,我们有

**定理 1.4.2** 假设 $D\subset C^n$ 且全纯映射 $F:D\to C^n$ 在点 $a$ 是非奇异的(即 $detF'(a)\neq 0$). 那末存在点 $a$ 的一个开邻域 $U$ 和 $b=F(a)$ 的一个开邻域 $W$,使得 $F|_U:U\to W$ 是一个同胚并有全纯逆映射 $H:W\to U$.

**证明** 我们引进从 $C^n\times D$ 到 $C^n$ 的映射 $G(w,z)=F(z)-w$. 由假设 $G(b,a)=0$ 且

$$\det\left[\frac{\partial g_k}{\partial z_j}\right]_{\substack{k=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,n}}(b,a)=\det F'(a)\neq 0.$$

因此由隐函数存在定理 1.1.10 知存在一从 $b$ 的邻域 $W$ 到一球 $B(a,\varepsilon)\subset D$ 的全纯映射 $H$,使得对 $(w,z)\in W\times B$ 有 $G(w,z)=0$, 即 $w=F(z)$,当且仅当 $z=H(w)$. 由此知 $H:W\to U=F^{-1}(W)$ 就是所要求的 $F|_U$ 的全纯逆映射.□

**定义 1.4.1** 命 $D_1,D_2$ 分别是 $C^n$ 和 $C^m$ 中的开集,映射 $F:D_1\to D_2$ 称为**双全纯**的,如果 $F$ 是一全纯同胚并存在全纯逆映射 $F^{-1}D_2\to$

$D_1$.

如果 $F$ 是双全纯的，则由复合函数导数的链式法则可知 $(F^{-1})'(F(z))$ 是 $F'(z)$ 的逆矩阵. 特别，当 $m=n$ 时，$F$ 是非奇异的.

开集 $D_1$ 和 $D_2$ 称为**双全纯等价的**，如果存在一双全纯映射 $F: D_1 \to D_2$.

$F: D_1 \to D_2$ 称为**在点 $D \in D_1$ 是双全纯的**，如果存在 $a$ 的一个邻域 $U$，使得 $F|_U: U \to F(U)$ 是双全纯的. 因此定理 1.4.2 也可表述为

**定理 1.4.2** 如果 $D \subset C^n$ 且 $F: D \to C^n$ 是全纯的且在点 $a \in D$ 是非异的，那末 $F$ 在点 $a$ 是双全纯的.

### 1.4.3 自同构群

将区域映为自己的双全纯映射，称为这区域的自同构. 区域的所有自同构全体显然构成一群，称为这区域的**自同构群**.

下面介绍两个区域和它们的自同构.

**Reinhardt 域(多重圆型域).** 一域如果具有这样的性质，对属于它的每一点 $z^0$，那末所有的点 $z=(z^0-a)e^{i\theta}+a$，其中 $\theta=(\theta_1, \theta_1, \cdots, \theta_n)$ 为任意的实向量，也属于这区域，这区域称为 Reinhardt 域(多重圆域). 点 $a$ 称为区域的**中心** Reinhardt 域的自同构为

$$\zeta_j=(z_j-a_j)e_j^{i\theta}+a_j, j=1,2,\cdots,n.$$

如果点 $z^0$ 属于 Reinhardt 域，那末所有的点

$$\{z: z_j=\lambda_j(z_j^0-a_j)+a_j, \quad |\lambda_j| \leqslant 1, \quad j=1,2,\cdots,n\}$$

也属于它，则这个 Reinhardt 域称为**完全的** Reinhardt **域**.

球 $B(a,r)=\{z \in C^n: |z-a|<r\}$

和多圆柱域 $P(a,r)=\{z \in C^n: |z_j-a_j|<r_j, | \leqslant j \leqslant n\}$ 都是完全的 Reinhardt 域.

易知幂级数 $\sum C_\nu z^\nu$ 的收敛区域 $D$(可能是空集) 是一完全的 *Reinhardt* 域.

**Hartogs 域(半圆型域)**. 如果点 $z^0$ 属于区域,那末所有的点

$$\{(z_1^0-a_1)e^{i\theta_1}+a_1,\tilde{z}^0\},\tilde{z}^0=(z_2^0,\cdots,z_n^0),$$

其中 $\theta_1$ 为任意的实数,也属于这区域,这区域称为 Hartogs 域. 平面 $z_1=a_1$ 称为这区域的对称平面. Hartogs 域的自同构为

$$\zeta_1=(z_1-a_1)e^{i\theta_1}+a_1,\quad \tilde{\zeta}=\tilde{z}.$$

如果点 $z^0$ 属于 Hartogs 域,那末所有的点

$$\{z:z_1=\lambda_1(z_1^0-a_1)+a_1,\tilde{z}=\tilde{z}^0,|\lambda_1|\leqslant 1\},$$

也属于 Hartogs 域,则这个 Hartogs 域称为**完全的 Hartogs 域**.

### 1.4.4 关于 $C^n$ 中域的分类问题

在复数平面 $C^1$ 上有下述著名的

**定理 1.4.4(黎曼基本定理)** 任意一个边界点多于一点的单连通区域 $D$,可以由一个双全纯映射 $w=f(z)$ 将它映射为单位圆盘 $|w|<1$. 如再任意给定一点 $z_0\in D$,令 $f(z_0)=0$ 及 $f'(z_0)$ 是正实数,则映射函数 $w=f(z)$ 是唯一的.

所谓域的分类就是在双全纯映射下将域分为等价类,在每一等价类中找出一个最简单的代表域;根据黎曼基本定理,单位圆盘就是复数平面 $C^1$ 上边界点多于一点的单连通区域的最简单代表,正是因为单位圆盘具有相当普遍的代表性,所以单复变数函数论的许多问题在单位圆盘上讨论.

但是黎曼基本定理在 $C^n$ 空间不再成立. 1907 年 H · Poincare′ 发现(“Les functions analytiques de deux variabies et la repre′sentation conforme”, Rend. Circ. Mat. Palermo 23(1907), 185—220) 在 $C^2$ 中的双圆盘 $P(0,1)$ 和超球 $B(0,1)$,虽然它们都是边界点多于一点的单连通区域,但不存在一个双全纯映射将 $P(0,1)$ 映为 $B(0,1)$. 这个结果的证明方法很多,在许多多复变数的书中都可以找到. 例如指出 $P(0,1)$ 和 $B(0,1)$ 的双全纯自同构变换群是不同的;或者算出它们的酉曲率,则前者是变量,后者是常量,由于酉曲率是全纯映射下的不变量,所以 $P(0,1)$ 和 $B(0,1)$ 不是全纯等价的.

由于黎曼基本定理在 $C^n$ 空间不再成立,目前 $C^n$ 空间中域的分

类问题又仍未解决，这就给多复变数的研究带来许多困难，本书以后各章将逐步介绍克服这个困难的研究.

## 第一章　参考文献*

陆启铿　[1961]

钟同德　[1986]

S · Bergman [1931]

H · Grauert & K · Fritsche[1976]

L · Hörmander[1966]

F · Hartogs[1906a][1906b]

П · А · Айзенберг, А · П · Южаков[1979]

В · С · Владимиров[1964]

Б · А · фукс[1963]

* 在每一章的末了都附上一定的参考文献，从其中可以获得本章有关的补充材料，全书参考文献附在书末.

# 第二章　全纯域与拟凸域

在 1906 年 F. Hartogs 发现了 Hartogs 现象，它揭示了多复变数和单复变数全纯函数的本质不同，从此引导出全纯域的概念，为了判别什么域是全纯域又产生了拟凸域的概念，本章 §2.1 先用具体例子说明Hartogs现象，然后介绍全纯域的定义，接着 §2.2介绍全纯凸域的概念，这是 1932 年 H. Cartan 和 P. Thullen 提出的判别全纯域的一种内蕴的全局判别法，§2.3 我们介绍次调和函数和多重次调和函数的定义和简单性质；§2.4 介绍拟凸域和 *Levi* 问题，介绍了拟凸域的二种定义并证明在 $C^{(2)}$ 边界下的等价性，同时我们证明了 $C^n$ 中具有 $C^{(2)}$ 边界的全纯域是拟凸域.

## §2.1　全　纯　域

在 §1.3.3 我们介绍了 Hartogs 现象，下面再举一个具体的例子来说明这个现象的存在.

**例.** 设

$$D = \{(z,w) \in C^2 : |z| < 1, \beta < 1, \beta < |w| < 1\}$$

$$\cup \{(z,w) \in C^2 : |z| < \alpha, |w| < 1\}$$

那末每一个在 $D$ 上全纯的函数 $f(z,w)$ 都可以全纯开拓到双圆柱

$$\tilde{D} = \{(z,w) \in C^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$$

**证明**　作映射

$$\varphi : C^2 \to R^2$$

$$(z,w) \to (|z|, |w|)$$

则区域 $D$ 可用右面示意图 2.1.1 中的斜线部份 $S$ 表示，即

$$D = \varphi^{-1}(S)$$

下面我们用两种方法来证明上述论断。

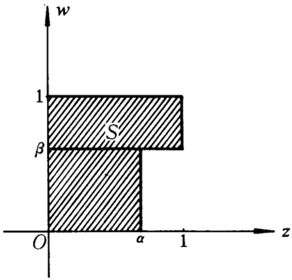



图 2.1.1

**1. 利用 Laurent 级数开拓**

因为函数 $f(z,w)$ 当 $|z|<1$ 时在 $\beta<|w|<1$ 全纯，因此对任意给定的 $|z|<1$，$f(z,w)$ 可展开为 Laurent 级数

$$f(z,w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z) w^k, \quad \beta < |w| < 1 \tag{2.1.1}$$

其中 $a_k(z)$ 是 $|z|<1$ 中的全纯函数，但当时 $|z|<\alpha$ 时，上式是 $|w|<1$ 中的全纯函数，故当 $|z|<\alpha$ 时，(2.1.1) 中的 Laurent 展开式不出现负次幂项，即 $a_k(z)=0, \forall\, k<0$. 因为 $a_k(z)$ 为 $|z|<1$ 中的全纯函数，而在其中之一个开集上为 0，所以根据全纯函数的唯一性定理 $a_k(z)\equiv 0, \forall\, k<0$. 由此可知函数 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\widetilde{D}$ 上的全纯函数。

**2. 利用 Cauchy 积分公式开拓**

任取一适合 $\beta<\beta'<1$ 的 $\beta'$，定义全纯函数

$$\widetilde{f}(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\beta'} \frac{f(z,\zeta)}{\zeta - w} d\zeta, \tag{2.1.2}$$

它在双圆柱 $\{(z,w)\in C^2 : |z|<1, |w|<\beta'\}$ 中是全纯的，而在 $\{(z,w)\in C^2 : |z|<\alpha, |w|<1\}$ 上 $\widetilde{f}(z,w)=f(z,w)$，因为这时它们可以用同一个 Cauchy 型积分表示，所以这样定义的 $\widetilde{f}(z,w)$，就是原来的 $f(z,w)$ 的全纯开拓，这也证明了 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\widetilde{D}$ 上的

全纯函数.□

现在我们再回顾一下单复变数的情形，复数平面上任何一个开集 $D$，对它边界上的任何一点 $P \in \partial D$，都可取函数 $f_p = (z - p)^{-1}, z \in D$，这个函数在 $D$ 上全纯但不能全纯开拓到 $P$ 点以外去，特别是单位圆盘 $D(0,1) = \{z \in C^1 : |z| < 1\}$，不难构造一在圆盘 $|z| < 1$ 内全纯，但单位圆周 $|z| = 1$ 上任意一点都是它的奇点的函数，例如函数

(2.1.3) $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + \cdots \quad |z| < 1$

就是在 $|z| < 1$ 内全纯的函数(因为在 $|z| < 1$ 内级数收敛)，但当 $z \to 1$ 时，$f(z) \to \infty$，所以 $z = 1$ 是它的一个奇点，又因

$$f(z) = z^2 + f(z^2),$$

当 $z^2 \to 1, f(z^2) \to \infty$，从而 $f(z) \to \infty$，所以 $z = -1$ 也是它的一个奇点，再因

$$f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4),$$

易知凡使 $z^4 = 1$ 的 $z$ 都是 $f(z)$ 的奇点，一般，方程

$$z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1, \quad z^{16} = 1, \cdots$$

的根都是 $f(z)$ 的奇点，这些奇点都在单位圆周上，因此在单位圆周上无论如何短的弧上，都有无限密集的奇点，所以单位圆周上的任意一点都是 $f(z)$ 的奇点，这时单位圆周称为函数 $f(z)$ 的**自然边界**.

通过以上的分析我们有下面的

**定义 2.1.1** (全纯域) 开集 $D \subset C^n$ 称为**全纯域**，如果在 $C^n$ 中不存在具有下列性质的开集 $D_1$ 和 $D_2$：

(a) $\varnothing \neq D_1 \subset D_2 \cap D$.

(b) $D_2$ 是连通的并且不包含在 $D$ 内.

(c) 对每一个 $u \in A(D)$ 存在一函数 $u_2 \in A(D_2)$ (必须是唯一决定的) 使得在 $D_1$ 上 $u = u_2$.

粗糙地说，这个定义表示不存在边界的任何部分使 $A(D)$ 中的

每一元素都能越过边界的这部分全纯开拓到外面去.

定义 2.1.1 也可表述为：

设 $D$ 是 $C^n$ 中的一域，如果不存在更大的 $\widetilde{D} \supset D, \widetilde{D} \neq D$，能使 $f \in A(D)$ 都可以全纯开拓到 $\widetilde{D}$ 上，则 $D$ 称为**全纯域**.

由上述定义可知，$D$ 是全纯域的意思是说，$D$ 上的全纯函数不能通过 $D$ 的边界上的任何点都全纯开拓出去，因此，对边界 $\partial D$ 上的任一点 $P$，都可以找到一 $f \in A(D)$，它不能开拓到包含 $P$ 点的一个邻域.

复数平面 $C^1$ 上任一开集都是全纯域，但以后会看到在 $C^n$ 中并非如此.

从域的分类的意义上来看，单位圆盘中复数平面上是很有代表性的区域，它的重要性质就是它是一个全纯域.所以定义 2.1.1 在某种意义上是在 $C^n$ 空间中拓广了单位圆盘的性质；由于在复数平面上 Riemann 基本定理在 $C^n$ 中不成立，所以全纯域在 $C^n$ 中是一类十分重要的域，以下我们着重研究全纯域的判别法.

## §2.2 全纯凸性　全纯凸域

### 2.2.1 Cartan-Thullen 定理

在 $C^n$ 中什么域是全纯域？联想到复数平面 $C^1$ 中的单位圆盘我们自然会猜想 $C^n$ 中的欧氏凸域是全纯域，这人猜想是对的，我们先介绍

**定义 2.2.1** $C^n$ 中的域 $D$ 称为**欧氏凸的**，如果对边界上的任一点 $P \in \partial D$，

都存在一个通过 $P$ 点的实超平面 $H$，满足

$$H \cap D = \varnothing.$$

**定理 2.2.1** 如果区域 $D \subset C^n$ 是欧氏凸的，则 $D$ 是全纯域.

**证明** 任取一点 $P \in \partial D$，不妨设 $P = 0$，由定义，存在实超平

面

$$H: \sum (a_k z_k + \bar{a}_k \bar{z}_k) = 0, \text{即 Re} \sum a_k z_k = 0$$

与 $\partial D$ 仅交于点 $O$，记 $H$ 的共轭超平面为

$$iH: \sum (\sqrt{-1} a_k z_k - \sqrt{-1} \bar{a}_k \bar{z}_k) = 0, \text{即 Im} \sum a_k z_k = 0.$$

则 $0 \in (iH)$，由于 $H \cap (iH) \subset H$，所以与 $H \cap (iH)$ 与 $D$ 仍不相交，这时 $H \cap (iH)$ 为一复超平面，记为 $L(z)$，即

$$H \cap (iH): L(z) \equiv \sum a_k z_k = 0$$

作函数

$$f(z) = \frac{1}{L(z)},$$

则显然 $f \in A(D)$ 并且不能开拓到包含点 $O$ 的邻域. □

显然，这个定理的逆是不成立，当 $n = 1$ 时就可清楚地看出，因为复数平面上的任一开集都是全纯域，这个开集不必是欧氏凸的，由此可知全纯域的概念，远较欧氏凸为广. 另一方面，全纯域的定义表明全纯域在全纯坐标变换下仍然是全纯域，但欧氏凸域在全纯坐标变换下不能保持不变，除非这个变换是复线性变换.

下面介绍一个 H. Cartan 和 P. Thullen 在 1932 年提出的全纯域的内蕴判别法，这个判别法利用关于全纯函数 $A(D)$ 的代数的凸性条件，这个"全纯凸"是多复变数中的最基本概念之一.

我们先来考察一下在欧氏空间 $R^{2n}$ 中，怎样得到一个闭集 $K$ 的**欧氏凸包**？从直观上看来，我们可以对任意一点 $x \in \partial K$，作一切可能的超平面 $H$，使 $K$ 全在 $H$ 的同侧，这些超平面 $H$ 的包络，就是 $K$ 的**凸包** $\hat{K}$，用数学的语言来说，就是

$$\hat{K} = \{z \in R^{2n}: l(z) \leqslant \sup_K l \quad \forall \text{ 实值线性函数 } l\},$$

若换成复坐标，$l(z) = \text{Re}L(z)$，$L(z)$ 是复线性函数，则上式可以写成

$$\hat{K} = \{z \in C^n: |e^{L(z)}| \leqslant \sup_K |e^L| \quad \forall \text{ 复线性函数 } L\}.$$

不难看出，如果 $D$ 是欧氏凸的，则对任何 $D$ 中的紧集 $K$，它的欧氏凸包 $\hat{K}$ 也是 $D$ 中的紧集. 但是这种性质在全纯坐标变换下不再保持，因为全纯坐标变换不能保持复线性函数仍为复线性. 由于域的全纯性在全纯坐标变换下是不变的，所以我们考虑的函数类应该是在全纯坐标变换下不变的函数类，即全纯函数类，由此启发我们考虑下面的

**定义 2.2.2** (全纯凸包和纯凸域)

设 $D$ 是 $C^n$ 中的域，$K$ 是 $D$ 中的一个紧集，集合

$$\hat{K} = \{z \in D : |f(z)| \leqslant \operatorname{Sup}_K |f|, \forall f \in A(D)\}$$

称为 $K$ 的**全纯凸包**，

如果对每一个 $K \subset\subset D$，都有 $\hat{K} \subset\subset D$，则域 $D$ 称为**全纯凸的**，

显然，$\hat{K}$ 有下列简单性质：

1) $\hat{K}$ 在 $D$ 中是相对闭的.

2) $K \subseteq \hat{K}$.

3) 如果 $\hat{K} \subset\subset D$，则 $(\hat{K})^{\wedge} = \hat{K}$，这是因为

$z \in (\hat{K})^{\wedge} \Leftrightarrow |f(z)| \leqslant \operatorname{Sup}_{\hat{K}} |f| = \operatorname{Sup}_K |f|, \forall f \in A(D)$.

4) 如果令 $f = \exp(\sum z_k \zeta_k)$，则 $\hat{K}$ 在 $K$ 的欧氏闭包中，所以如果 $K$ 是有界集合，则 $\hat{K}$ 也是有界集合.

下面的定理表明全纯域与全纯凸域是一致的.

**定理 2.2.2** (Cartan-Thullen) 设 $D$ 是 $C^n$ 中的域，则以下条件等价：

(Ⅰ) $D$ 是全纯域.

(Ⅱ) $D$ 是全纯凸的.

(Ⅲ) 存在一个 $f \in A(D)$，以 $\partial D$ 为自然边界.

**证明** (Ⅲ)⇒(Ⅰ) 由全纯域的定义立得.

(Ⅰ)⇒(Ⅱ) 设 $F$ 是 $D$ 中的任一子集，定义

$$d(F) = \inf_{z \in F} \operatorname{dist}(z, C^n \setminus D)$$

称为 $F$ 与 $\partial D$ 的**距离**，设紧集 $K \subset\subset D$，$\hat{K}$ 为 $K$ 的全纯凸包，我们只要证明 $d(\hat{K}) > 0$，但不仅如此，我们还能证明 $d(\hat{K}) = d(K)$

对任意适合 $d(K) > \varepsilon > 0$ 的 $\varepsilon$，记

$$K_\varepsilon = \{z \in D: \text{dist}(z, K) \leqslant \varepsilon\} \subset D.$$

则对任何以 $z \in K$ 为中心，以 $\varepsilon$ 为半径的多圆柱都在 $K_\varepsilon$ 之内，由多圆柱的 Cauchy 不等式(推论 1.1.2)，有

$$|D^\alpha f(z)| \leqslant \frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} \operatorname{Sup}_{K_\varepsilon} |f|, \forall\ z \in K, f \in A(D).$$

由 $\hat{K}$ 的定义，如 $z^0 \in \hat{K}$，则有

$$|D^\alpha f(z^0)| \leqslant \operatorname{Sup}_{K} |D^\alpha f| \leqslant \frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} \operatorname{Sup}_{K_\varepsilon} |f|,$$

因此对 $\forall\ z^0 \in \hat{K}$

$$f(z) = \sum \frac{D^\alpha f(z^0)}{\alpha!}(z - z^0)^\alpha$$

是在以 $z^0$ 为中心，以为 $\varepsilon$ 半径的多圆柱中收敛的，根据全纯域的定义，以上事实对一切 $f \in A(D)$ 成立，所以必有 $f(z^0, \partial D) \geqslant \varepsilon$，故 $d(\hat{K}) \geqslant \varepsilon$，但另一方面，显然有 $d(K) \geqslant d(\hat{K})$，$\varepsilon$ 可以任意接近 $d(K)$，因而 $d(K) = d(\hat{K})$.

(Ⅱ) → (Ⅲ)　我们要由全纯凸的性质，构造出一个以 $\partial D$ 为自然边界的全纯函数.

在 $D$ 中选取一个点列 $\{z_\nu\}$ 与一簇紧集 $K_\nu = \hat{K}_\nu$，使之适合：

(1) $D = \bigcup_\nu K_\nu, K_\nu \subset K_{\nu+1}$,

(2) $\partial D$ 的每个点都是点集 $\{z_\nu\}$ 的聚点，

(3) $z_\nu \overline{\in} K_\nu$

由(2)和(3)知，$\{z_\nu\}$ 在 $D$ 内无聚点，全部聚点集是 $\partial D$，由全纯凸性及 $z_\nu \overline{\in} K_\nu = \hat{K}_\nu$，可知对每个 $\nu$ 都存在一 $f_\nu \in A(D)$，使

$$|f_\nu(z_\nu)| > \sup_{K_\nu} |f_\nu|$$

以 $f_\nu / f_\nu(z_\nu)$ 代替 $f_\nu$，再自乘适当幂次，可使所取 $f_\nu$ 满足

$$f_\nu(z_\nu) = 1 \text{ 及} \operatorname{Sup}_{K_\nu} |f_\nu| < \varepsilon_\nu$$

其中 $\varepsilon_\nu$ 是一个任意小的正数列，且 $\sum \nu\varepsilon_\nu < +\infty$

作无穷乘积

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - f_\nu)^\nu,$$

因它与 $\sum \nu\log(1 - f_\nu)$ 同敛散，故由 $\sum \nu|f_\nu| < \sum \nu\varepsilon_\nu < +\infty$，可知它在 $D$ 内收敛，记为 $f$，则 $f \in A(D)$，且不恒为零，但显然

$$D^\alpha f(z_\nu) = 0, \forall\ |\alpha| < \nu.$$

对任何 $z^* \in \partial D$，取 $\{z_\nu\}$ 的子序列 $\{z_{\nu_j}\} \to Z^*$，我们有

$$D^\alpha f(z_{\nu_j}) = 0, |\alpha| < \nu_j.$$

如果 $f$ 可以通过 $z^*$ 开拓出去，则由连续性，

$$D^\alpha f(z^*) = 0, \forall\ |\alpha| < \nu_j,$$

命 $\nu_j \to \infty$，则我们有

$$D^\alpha f(z^*) = 0, \forall\ \alpha,$$

因而 $f(z)$ 在 $z^*$ 的某个邻域为零，由唯一性定理，在 $D$ 上 $f(z) \equiv 0$，这与 $f(z) \not\equiv 0$ 相矛盾. □

下面再介绍一个对判别一个域是否全纯域较为具体的方法.

**定理 2.2.3** 域 $D \subset C^n$ 是全纯凸的(因而是全纯域)，当且仅当对 $\forall\ \{z_\nu\} \to \partial D$，$\exists\ f \in A(D)$，$\{|f(z_\nu)|\}$ 无界.

**证明** 先证条件的**充分性**. 若 $D$ 不是全纯凸的，则 $\exists\ K \subset\subset D$，使 $\hat{K}$ 在 $D$ 中不是紧的，于是存在 $\{z_\nu\} \in \hat{K}$，$\{z_\nu\} \to \partial D$，对 $\forall\ f \in A(D)$，$|f(z_\nu)| \leqslant \operatorname{Sup}_K |f|$，即 $\{|f(z_\nu)|\}$ 有界，与假设矛盾.

再证条件的**必要性**. 设 $\{z_\nu\}$，$\in D$，$z_\nu \to \partial D$，取 $K_\nu = \hat{K}_\nu \subset\subset D$，$D = \bigcup K_\nu$，假定 $z_\nu \bar{\in} K_\nu$，$z_\mu \in K_\nu$，$\mu < \in \nu$，按全纯凸的定义，对每个 $\nu$ 可以选取一 $f_\nu \in A(D)$，使

$$|f_\nu(z_\nu)| \geqslant \nu + \sum_{\mu<\nu} |f_\mu(z_\mu)|$$

与

$$\operatorname*{Sup}_{K_\nu}|f_\nu| < \frac{1}{2^\nu},$$

这时 $\sum_\nu f_\nu$ 在 $D$ 内收敛，记 $f = \sum_\nu f_\nu \in A(D)$，由 $f_\nu$ 的性质

$$|f(z_\nu)| \geq |f_\nu(z_\nu)| - \sum_{\mu<\nu}|f_\mu(z_\mu)| - \sum_{\mu>\nu}|f_\mu(z_\nu)|$$

$$\geq \nu - \sum_\nu \frac{1}{2^\nu} \geq \nu - 1,$$

所以 $\{|f(z_\nu)|\}$ 无界. □

### 2.2.2 例子

**例 1** 任一域 $D \subset C^1$ 都是全纯凸的.

**证明** 假设 $\{P_\nu\} \subset D$ 在 $D$ 中无聚点，如果 $\{P_\nu\}$ 无界，则函数 $f(z) = z$ 将在 $\{P_\nu\}$ 上无界. 如果 $\{P_\nu\}$ 有一聚点 $p \in \partial D$，则函数 $f(z) = (z - p)^{-1} \in A(D)$ 在 $\{P_\nu\}$ 上无界. □

同理可证(参考定理 2.2.1 的证明)

**例 2** $C^n$ 中的任一凸区域都是全纯凸的.

**定理 2.2.4** 有限多个全纯凸开集的交是全纯凸的.

证明是显然的.

**定理 2.2.5** 两个全纯凸域 $D_i \subset C^{n_i}, i = 1,2$ 的积 $D = D_1 \times D_2$ 是全纯凸的，特别，任一广义多圆柱域 $D = D_1 \times \cdots \times D_n, D_j \subset C$ 是全纯凸的.

**证明** 对于第一个结论，显然只要证明 $Q = (K_1 \times K_2)_{A(D_1\times D_2)} \subset\subset D_1 \times D_2$，其中，$K_i \subset D_i, i = 1,2$ 是紧集，由于每一函数 $f \in A(D_i)$ 都定义 $A(D_1 \times D_2)$ 中的一函数，我们有 $Q \subset (\hat{K}_1)_{A(D_1)} \times D_2$ 和 $Q \subset D_1 \times (\hat{K}_2)_{A(D_2)}$，因此 $Q \subset (\hat{K}_1)_{A(D_1)} \times (\hat{K}_2)_{A(D_2)} \subset\subset D_1 \times D_2$，第二个结论可由归纳法和例 1 得到.

下面我们引进一类域，它们是多圆柱域的拓广.

**定理 2.2.3** 开集 $D \subset\subset C^n$ 称为**解析多面体**，如果存在 $\bar{D}$ 的一邻域 $U$ 和有限个函数 $f_1, \cdots, f_l \in A(U)$ 使得

(2.2.1) $D = \{z \in U : |f_1(z)| < 1, \cdots, |f_l(z)| < 1\}$.

函数 $f_1,\cdots,f_l$ 称为 $D$ 的**标架**.

**定理 2.2.6** 第一解析多面体都是全纯凸的.

**证明** 假设 $\{f_1,\cdots,f_l\}\subset A(U)$ 是解析多面体 $D$ 的一个标架. 如果 $K\subset D$ 是紧的,那末 $r_j=\sup\limits_k|f_j|<1,j=1,\cdots,l$ 显然

$$\hat{K}_{A(D)}\subset\{z\in U:|f_1(z)|\leqslant r_1,\cdots,|f_l(z)|\leqslant r_l\},$$

且后一集合在 $D$ 中是相对紧的. □

**定理 2.2.7** 如果存在一列全纯域 $\{D_j\}$, $D_j\subset D_{j+1}$ 使 $D=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}D_j$,那末 $D$ 是全纯域.

**证明** 任意取一紧集 $K\subset\subset D$,由于 $D=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}D_j$,且 $D_j\subset D_{j+1}$,故存在 $N$,使 $K\subset D_N$,由于 $D_N$ 是全纯域,由 Cartan-Thullen 定理 $D_N$ 是全纯凸的,故 $\hat{K}\subset\subset D_N\subset D$,于是 Cartan-Thullen 定理再次表明 $D$ 是全纯域. □

## §2.3 多次调和函数

Cartan-Thullen 定理给出了用全纯凸性来刻划全纯域,全纯凸的概念在理论上也十分重要,例如我们在第四章中将定义的 Stein 流形就是以全纯凸的概念为基础的,不过全纯凸性是不易判定的,自然的想法是全纯凸域能否用边界的某种凸性来刻划,早在 1910 年,E. E. Levi[1910] 就已提出这种办法,在介绍 Levi 凸性之前,下面先介绍多次调和函数,这是 Levi 凸性的基础.

### 2.3.1 复数平面上的调和函数

本段先回顾一下复数平面 $C^1$ 上的调和函数的一些重要性质,熟知 $C^1$ 上的 Laplace 算子 $\triangle$ 定义为

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}},\tag{2.3.1}$$

其中 $z=x+iy$. 区域 $D\subset C^1$ 上的函数 $u$ 称为**调和的**,如果在 $D$ 上

$\triangle u = 0$,下面我们介绍调和函数的一些熟知的初等性质:

1. 一实值函数 $u$ 是调和的,当且仅当 $u$ 局部地是一全纯函数的实部,调和函数是 $C^\infty$ 的,而且是实解析的.

2. **均值性质** 如果 $u$ 在 $D \subset C^1$ 是调和的,那末

(2.3.2) $$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$$

当 $\{z : |z - a| \leqslant r\} \subset D$.

3. **极大值原理** 如果 $u$ 是实值的并且在 $D \subset C^1$ 是调和的,那末:

(**强形式**) 如果 $f$ 在点 $a \in D$ 有一个局部极大,那末 $u$ 在 $a$ 的一个邻域是常数(因此在 $D$ 的包含 $a$ 的连通分支上也是常数).

(**弱形式**) 如果 $D \subset\subset C^1$ 且 $u$ 可连续开拓到 $\overline{D}$,那末 $u(z) \leqslant \max_{\partial D} u$ 对 $z \in D$.

注意,强形式的极大值原理隐含弱形式的极大值原理.

4. **Dirichlit 问题** 如果 $\triangle = \{z : |z - a| < r\}$ 和 $g \in C(\partial\triangle)$,那末存在唯一一个在 $\triangle$ 调和在 $\overline{\triangle}$ 连续的函数 $u$,使得 $u(z) = g(z)$ 当 $z \in \partial\triangle$. 这个调和扩张 $u$ 由 $g$ 的 Poisson 积分明显地给出

(2.3.3) $$u(a + \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |\zeta|^2}{|re^{i\theta} - \zeta|^2} g(a + re^{i\theta})d\theta \text{ 当 } |\zeta| < r.$$

### 2.3.2 次调和函数

Laplace 方程在一个实变数情形的类似解是线性函数 $l(x) = ax + b$. 函数 $y = u(x)$ 称为**凸的**,如果在它的定义域的任何区间$[\alpha, \beta]$上,$u(x)$ 是小于或等于唯一的线性函数 $l$,且 $u(\alpha) = l(\alpha)$ 和 $u(\beta) = l(\beta)$. 将以上定义中的线性函数代以调和函数就引出**次调和函数**的概念:连续函数 $u$ 在 $D \subset C^1$ 上是次调和的,如果在每一圆盘 $\triangle \subset\subset D$ 上有 $u \leqslant h$,其中 $h \in C(\overline{\triangle})$ 是在 $\triangle$ 上唯一的调和函数,且在 $\partial D$ 上 $h = u$,(函数 $h$ 由圆盘上的 Dirichlet 问题的解可知是存在的).

由于技术上的理由，在次调和函数的定义中以包括半连续函数和充许取值 $-\infty$ 为方便，而且，常常将圆盘代以更一般的点集(虽然这是无关紧要的，见下面的定理 2.3.1)，由于在这种情形下 Dirichlet 问题一般不一定有解，我们采用下述

**定义 2.3.1** (次调和函数)　函数 $u: D \to R \cup \{-\infty\}$ 称为次调和的(Subharmonic)，如果 $u$ 是上半连续的，而且对每一紧集 $K \subset D$ 和每一在 $K$ 的内部调和的函数 $h \in C(k)$ 在 $\partial K$ 上满足 $u \leqslant h$，那末在 $K$ 上有 $u \leqslant h$.

对函数 $u$，若 $-u$ 是次调和函数，则称 $u$ 为**上调和函数**(Supper hamonic function).

其中函数上半连续的定义为：

**定义 2.3.2**(上半连续)　函数 $u$ 称为在 $D$ 上是**上半连续的**，如果

(2.3.4)　$\overline{\lim\limits_{z\to a}} u(z) = \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{U(a,\delta)\cap D} u(z) = u(a)$，对 $a \in D$，

或等价地

(2.3.5)　$\{z \in D: u(z) < c\}$ 对每一个 $C \in R$ 是开的.

上半连续函数在每一紧集上取到一极大(然而不一定取到一极小)，函数 $u: D \to R$ 是连续的，当且仅当 $u$ 和 $-u$ 是上半连续的.

由(弱)极大值原理立知调和函数是次调和函数同时也是上调和函数，在我们讨论了次调和函数的一些特性后，我们再介绍次调和函数其它例子.

**引理 2.3.1.**　命 $D \subset C^1$ 是开的.

(Ⅰ) 如果 $u$ 在 $D$ 是次调和的，则 $Cu(C > 0)$ 也是.

(Ⅱ) 如果 $\{u_a: a \in A\}$ 是 $D$ 上的一族次调和函数，使得 $u = \operatorname{Sup} u_a$ 是有限的和上半连续的，那末 $u$ 是次调和的.

(Ⅲ) 如果 $\{u_j, j = 1,2,\cdots\}$ 是 $D$ 上次调和函数的递减序列，那末 $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ 是次调和的.

**证明** （Ⅰ）和（Ⅱ）是定义的显然结论，为了证明（Ⅲ），假设 $K \subset D$ 是紧的，$h \in C(K)$ 在 $\mathrm{int}(K)$ 是调和的且在 $\partial K$ 上 $h \geqslant u = \lim u_j$. 给定 $\varepsilon > 0$，$E_j = \{z \in \partial K : u_j(z) \geqslant h(z) + \varepsilon\}$ 是 $\partial K$ 上的子集，对 $j = 1, 2, \cdots, E_{j+1} \subset E_j$ 且 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \varnothing$. 由于 $\partial K$ 是紧的，存在 $l \in N$ 使 $E_l = \varnothing$，因此在 $\partial K$ 上 $u_e \leqslant h + \varepsilon$，由于 $u_l$ 是次调和的，这不等式在 $K$ 上也成立，这表示对所有 $\varepsilon > 0$ 在 $K$ 有 $u \leqslant k + \varepsilon$，即在 $K$ 上有 $u \leqslant h$. □

作为一个应用我们得到 $C^1$ 上任意区域的一个奇怪性质.

**推论 2.3.1** 对 $C^1$ 中的每一开集 $D$，函数 $u(z) = -\log\delta_D(z)$ 在 $D$ 上是次调和的，其中 $\delta_D(z)$ 表示从 $z \in D$ 到 $\partial D$ 的欧氏距离，即 $\delta_D(z) = \mathrm{dist}(z, C^n \backslash D)$.

**证明** 如果 $D = C^1$，则 $u \equiv -\infty$，那末没有什么要证明的，如果 $D \neq C^1$，那末 $u(z)$ 是连续的，且对 $z \in D$ 我们有 $u(z) = \mathrm{Sup}\{-\log|z - \zeta| : \zeta \in \partial D\}$；由于 $-\log|z - \zeta|$ 是调和的，因此在 $D$ 上是次调和的（局部地，它是 $-\log(z - \zeta)$ 的一个调和分支的实部份），由引理 2.3.1（Ⅱ）立得结论. □

**2.3.3 次均值性质.** 现在我们讨论次调和函数的一些其它特性，它们在许多情形都是有用的. 特别，从它们可以知道次调和性是一个局部性质.

我们回顾一下积分理论，对于一紧集 $K$ 上的 Borel 测度和一个上半连续函数 $u : K \to R \cup \{-\infty\}$，积分 $\int u d\mu$ 是有定义的（可能 $= -\infty$）. 而且

(2.3.6) $\displaystyle\int_K u d\mu = \inf\{\int_K \varphi d\mu : \varphi \in c(K) \text{ 且 } \varphi \geqslant u\}$，

又 $u \in L^1(K, \mu)$ 当且仅当 $\int u d\mu > -\infty$.

**定理 2.3.1** 命 $D$ 为 $C^1$ 中的开集，以下说法对上半连续函数 $u : D \to R \cup \{-\infty\}$ 是等价的：

(Ⅰ) $u$ 是次调和的

(Ⅱ) 对每一圆盘 $\triangle \subset\subset D$ 和在 $\partial\triangle$ 上满足 $u \leqslant \operatorname{Re} f$ 的全纯多项式 $f$，在 $\triangle$ 上，我们有 $u \leqslant \operatorname{Re} f$

(Ⅲ) 对每一个 $a \in D$ 存在一正数 $r_a < \delta_D(a)$ 使得

(2.3.7) $\quad u(a) \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$ 对所有 $0 < r \leqslant r_a$.

**注意.** (Ⅲ) 称为**次均值性质**，有时可用它作为次调和函数的判别法，显然它是一个局部性质并且是可加的. 因此我们有：

**推论 2.3.2** 如果 $u_1$ 和 $u_2$ 是次调和，则 $u_1 + u_2$ 也是.

在证明定理 2.3.1 之前我们先证明下面的

**引理 2.3.2** 满足次均值性质的上半连续函数 $u$ 满足强极大值原理.

**证明** 论证和在证明调和函数的极大值原理时常用的一样，假设 $u$ 满足次均值性质，且 $u$ 在 $a \in D$ 有一局部极大，即存在 $-\rho >0$ 使得对 $|z-a| \leqslant \rho$ 中所有的 $z$ 有 $u(z) \leqslant u(a)$. 我们可假设 $\rho \leqslant r_a$. 如果存在一点 $z_0$ 使 $r = |z_0 - a| \leqslant \rho$ 且 $u(z_0) \leqslant u(a)$，那末由 $u$ 的上半连续性，$\{\theta \in [0, 2\pi] : u(a + re^{i\theta}) < u(a)\}$ 将有非空内部；因此

$$\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta < \int_0^{2\pi} u(a)d\theta = 2\pi u(a),$$

这和假设矛盾，因此 $u$ 在 $a$ 的一个邻域必须有常量. □

**定理 2.3.1 的证明.** 显然由 (Ⅰ) 可推出 (Ⅱ). 为了证明 (Ⅱ)⇒(Ⅲ)，假设 $\triangle = \{z : |z-a| < r\} \subset\subset D$ 并命 $\varphi \in C(\partial\triangle)$ 且在 $\partial\triangle$ 上有 $\varphi \geqslant u$. 在用 $\varphi$ 的 Poisson 积分代替 $\varphi$ 以后，我们可假设 $\varphi$ 在 $\bar{\triangle}$ 是连续的在 $\triangle$ 是调和的，当 $\tau < 1$ 时，函数 $\varphi_\tau(z) = \varphi(a + \tau(z-a))$ 在 $\bar{\triangle}$ 的一个邻域是调和的，且当 $\tau \to 1$ 时一致地有 $\varphi_\tau \to \varphi$. 现在 $\varphi_\tau = R_e f_\tau$，其中 $f_\tau$ 在 $\bar{\triangle}$ 上是全纯的，又由考虑 $f_\tau$ 的 Taylor 级数部份和，可知对 $\varepsilon > 0$，存在一全纯多项式 $f$ 使在 $\partial\triangle$ 上

有 $u \leqslant \varphi \leqslant \mathrm{Re}f \leqslant \varphi + \varepsilon$. 由（Ⅱ）和调和函数 $R_e f$ 的均值性质，我们有

$$u(a) \leqslant \mathrm{Re}f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(a + re^{i\theta})d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})d\theta + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 的任意性，我们得到对每一连续函数 $\varphi \geqslant u$（在 $\partial\triangle$ 上）有

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})d\theta,$$

因此由(2.3.6)立得（Ⅲ）.

最后，证明（Ⅲ）→（Ⅰ），命 $K \subset D$ 是紧的，并假设 $h \in c(k)$ 在 $intK$ 是调和的，而且在 $\partial K$ 上有 $u \leqslant h$；我们要证明在 $K$ 上有 $u \leqslant h$. 注意到由（Ⅲ）和 $h$ 的均值性质可以推得 $u - h$ 在 $\mathrm{int}K$ 上的次均值性质. 所以由引理 2.3.2 知道，对有 $z \in K$，有 $(u - h)(z) \leqslant \max\limits_{\partial K}(u - h) \leqslant 0$，即在 $K$ 有 $u \leqslant h$. □

下述次调和函数的均值性质是十分有用的.

**定理 2.3.2**（次调和函数的均值）.

如果 $u$ 在圆盘 $\{|z - a| < \rho\}$ 是次调和的，那末

$$A(u;r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta \tag{2.3.8}$$

当 $0 < r < \rho$ 时是一非减函数.

**证明** 命 $\triangle(r) = \{|z - a| < r\}$ 并假设 $0 < r_1 < r_2 < \rho$. 命 $\varphi \in C(\partial\triangle(r_2))$ 在 $\partial\triangle(r_2)$ 上满足 $\varphi \geqslant u$，作 $\varphi$ 的 Poisson 积分，我们可以假设 $\varphi \in C(\triangle(r_2))$ 并且 $\varphi$ 在 $\triangle(r_2)$ 是调和的. 由均值性质，当 $r \leqslant r_2$ 时 $A(\varphi,r) = \varphi(a)$，又由 $u$ 的次调和性推知在 $\triangle(r_2)$ 上 $u \leqslant \varphi$. 因此对所有这样的 $\varphi$，$A(u;r_1) \leqslant A(\varphi;r_1) = A(\varphi;r_2)$，并由此可知 $A(u;r_1) \leqslant \inf\{A(\varphi;r_2)：$ 在 $\partial\triangle(r_2)$ 上 $\varphi$ 是连续的且 $\geqslant u\} = A(u;r_2)$. □

### 2.3.4 次调和函数的微分特性.

熟知在一区间 $I \subset R$ 上的 $C^{(2)}$ 类函数是凸的，当且仅当在 $I$ 上 $u''(x) > 0$. 类似的性质对光滑的次调的函数也成立，由此给出次调和性的一个计算检验.

**定理 2.3.3** 实值函数 $u \in C^{(2)}(D)$ 在 $D$ 上是次调和的，当且仅当在 $D$ 上 $\triangle u \geqslant 0$.

**证明** 首先我们从 $\triangle u > 0$ 推出 $u$ 是次调和的. 命 $K \subset D$ 是紧的，$h \in c(K)$ 在 $intK$ 是调和的，并假设在 $\partial K$ 上 $v = u - h \leqslant 0$. 如果对某些 $z \in K, v(z) > 0$，那末将在一点 $a \in intK$ 取极大，因此 $\triangle v(a) \leqslant 0$，由于 $\triangle h = 0$，这和 $\triangle u(a) > 0$ 矛盾，因此我们有 $v \leqslant 0$，即在 $K$ 上 $u \leqslant h$，即 $u$ 在 $D$ 上是次调和的，其次，如果 $\triangle u \geqslant 0$，将前面的论证应用到 $u_j = u + (1/j)|z|^2, j = 1,2,\cdots$ 表示 $u_j$ 是次调和的，由于当 $j \to \infty$ 时，$u_j(z)$ 递减到 $u(z)$，引理 2.3.1 也表明 $u$ 是次调和的.

要证逆命题，命 $u$ 是次调的并假设有一点 $a \in D$ 使得 $\triangle u(a) < 0$. 由连续性在点 $a$ 的一邻域 $U$ 有 $\triangle u < 0$，因此由证明的第一部份可知，$-u$ 在 $U$ 是次调和的. 因此 $u$ 和 $-u$ 在 $U$ 上是次调和的，所以 $u$ 在 $U$ 上是调和的；但这表示在 $U$ 上 $\triangle u = 0$ 和 $\triangle u(a) < 0$ 矛盾. 所以在 $D$ 上必须有 $\triangle u \geqslant 0$. □

**附注**：如果考虑"弱导数"或"广义导数"我们可以去掉定理 2.3.3 中的假设 $u \in C^{(2)}$.

### 2.3.5 次调和函数的例子.

**例 1** 如果 $u(z) \geqslant 0$ 是次调和函数，那末函数 $u^p(z)(p \geqslant 1)$ 也是次调和的.

**证明** 这个断言可以从 *Hölder* 不等式

$$u^p(z) \leqslant \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta\right]^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^p(z + re^{i\theta})d\theta$$

和次均值性质(2.3.7) 推出.

**例 2** 如果 $u(z)$ 是次调和函数，那末 $e^{u(z)}$ 也是次调和函数.

**证明** 这个断言可以从几何平均和算术平均之间的不等式

$$e^{\int p\log f dx} \leqslant \int pfdx, \text{如果} \int pdx = 1, p \geqslant 0, f \geqslant 0$$

和次均值性质(2.3.7)推出,事实上

$$e^{u(z)} \leqslant \exp\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta\} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{u(z + re^{i\theta})\}d\theta.$$

**例 3** 假设 $f(z)$ 在 $D$ 全纯,那末函数 $\log|f(z)|$, $\log^+|f(z)|$ 和 $|f(z)|^p (p \geqslant 0)$ 在 $D$ 是次调和的.

**证明** 由于

$$|f(z)|^p = e^{p\log|f(z)|}, \log^+|f(z)| = \max(0, \log|f(z)|),$$

所以只要证明函数 $\log|f(z)|$ 是次调和的,由于它不趋于 $+\infty$,在 $D$ 上半连续,又对所有足够小的 $r \leqslant r_a$ 和 $z \in D$,满足不等式(2.3.7),后一断言由下述理由推出:如果 $\log|f(z)| = -\infty$,则不等式(2.3.7)自然满足,如果 $\log|f(z)| = \mathrm{Re}\log f(z) > -\infty$ 是点 $z$ 的某一邻域上的调和函数,那末由等式(2.3.2)可知不等式(2.3.7)也满足.□

### 2.3.6 多次调和函数.

前面几段我们讨论了二个实变量的调和函数和次调和函数.这些概念在多个实变量有一个显然的拓广,但是这个拓广在多于一个复变量的复分析中不是十分有用,主要由于多于一个复变量时调和函数和全纯函数的实部不是等价的,再者,$D \subset C^n$ 上 $2n$ 个实变量的次调和函数在双全纯映射下不是不变的,除非 $n = 1$. 在多复分析中一个更有用的拓广是**多次调和函数**,它是这样的函数;当限制在复线上时是次调和的,下面我们给出正式的定义.

**定义 2.3.3**(多次调和函数) 命 $D$ 为 $C^n$ 中的开集,函数 $u: D \to R\cup\{-\infty\}$ 称为在 $D$ 上是**多次调和的**,如果 $u$ 是上半连续的,且如果对每一 $a \in D$ 和 $W \in C^n$,函数 $\lambda \to \mu(a + \lambda W)$ 在区域 $\{\lambda \in C^1 : a + \lambda W \in D\}$ 是次调和的. $D$ 上的多次调和函数类记为 $PS(D)$.

**注**:次调和函的某些性质多次调和函数也有. 例如,引理 2.3.1 对多次调和函数也成立. $PS(D)$ 在加法下是封闭的,又 $u \in PS(D)$ 当且仅当 $u$ 在每一点 $a \in D$ 的某一邻域是次调和的,如果 $f \in A(D)$,那末 $|f|^{\alpha}, \alpha > 0$ 和 $\log|f(z)|$ 在 $D$ 都是多次调和的(这可由上一段的例 3 得到. 因为当 $f$ 限制在一复线上时对参数 $\lambda$ 是全纯的).

另一方面,推论 2.3.1 不能拓广到高维去. 例如,若 $D = C^2 - \{0\}$,命 $u = -\log\delta_D(z)$,当 $a = (1,0)$ 和 $w = (0,1)$ 时,$u(a + \lambda w) = -\log\delta_D(1,\lambda) = -\log\sqrt{1 + |\lambda|^2}$,这个函数在 $\lambda = 0$ 有一个严格极大,因此它不能是次调和的(引理 2.3.2). 所以 $u$ 不是多次调和的,我们将在定义 2.5.3 中看到,对 $-\log\delta_D$ 是多次调和的域正好是拟凸的,也就是全纯的(见后面的 Levi 问题). 事实上,在 § 2.1 我们已经指出复数平面 $C^1$ 上任一开集都是全纯域,所以函数 $u = -\log\delta_D(z)$ 在任一开集 $D \subset C^1$ 上是次调和的,但在 $C^n$ 中并非任一开集都是全纯域,根据后面所介绍的 *Levi* 问题;拟凸域是全纯域,所以在 $C^n$ 中函数 $u = -\log\delta_D(z)$ 是多次调和的域正好就是全纯域,这就是很自然的了.

对 $C^{(2)}$ 类的多次调和函数有一类似于定理 2.3.3 中所说对次调和函数的微分性质,即我们有:

**定理 2.3.4** 命 $D \subset C^n$ 并设 $u \in C^{(2)}(D)$ 是实值的,那末 $u \in PS(D)$ 当且仅当 $u$ 的复 Hessian

$$L_z(u;w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) W_j \bar{W}_k,$$

对任一点 $z \in D$,在 $C^n$ 都是半定正的.

**证明** 直接计算可知,对 $w \in C^n$ 和 $a + \lambda w \in D$ 有

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}} u(a + \lambda\omega) = L_{a+\lambda w}(u;w). \tag{2.3.9}$$

由定理 2.3.3,$u(a + \lambda w)$ 对 $\lambda$ 是次调和的当且仅当(2.3.9)的左端是非负的. □

**定理 2.3.5** 假设 $\Omega\subset C^n$ 和 $D\subset C^m$ 是开的，又 $F: D\to\Omega$ 是全纯的，那末 $u\circ F\in PS(D)$，如果 $u\in PS(\Omega)\cap C^{(2)}(\Omega)$.

**证明.** 由计算可知 $L_a(u\circ F;w)=L_{F(a)}(u;F'(a)w)$. 然后引用定理 2.3.4.□

## §2.4 Levi 凸性 拟凸域($C^2$ 光滑边界)

Cartan-Thullen 定理用全纯凸性来刻划全纯域，但全纯凸性是不容易判定的，人们自然会想到全纯域能否用边界的某种凸性来刻划. 我们先考察一下在 $R^n$ 中欧氏凸域的边界是如何描述的.

设区域 $D\subset R^n$，边界 $\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 光滑的. 对点 $x\in\partial D$，作适当的坐标变换，将 $x$ 点变为原点 0，在这点切平面为 $x_n=0$，这时在 0 点附近，$D$ 可以定义为.

(2.4.1)
$$D=\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n: \varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})=f(x_1,\cdots,x_{n-1})-x_n<0\}.$$

于是区域 $D$ 在 0 点附近凸就等价于

(2.4.2)
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n-1}\geqslant 0,$$

在 0 点附近严格凸就等价于

(2.4.3)
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n-1}>0,$$

由于函数 $f$ 在 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 处达到极小，故 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_0=\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_0=0, 1\leqslant j\leqslant n-1$ 而，$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right|_0=-1$，故在 0 点切平面上的所有向量都可表示为 $(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0)$，这时在 0 点的切平面方程为

(2.4.4)
$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0.$$

于是(2.4.2)，(2.4.3) 式也等价于矩阵

(2.4.5)
$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

在 0 点的切平面上为半正定或正定.

在一般情形,若域 $D$ 的定义函数为 $\varphi$,即 $D=\{x:\varphi(x)<0\}$,则 $D$ 在 $x\in\partial D$ 是凸(或严格凸),就表示矩阵

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

对 $x$ 点的切平面上的所有向量,即满足

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0$$

的所有向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为半正定(或正定).

容易验证,这种凸性在线性变换下是不变的,但在全纯坐标变换下不再保持.

1910年E. E. Levi发现具有 $C^{(2)}$ 光滑边界的全纯域满足上述复形式下的类似形式,即有:

**定义 2.4.1**($C^{(2)}$ 光滑边界拟凸域)　设 $D\subset C^n$ 为一区域,$z^0\in\partial D$,若存在 $z^0$ 的一个邻域 $U$ 与一个定义在 $U$ 上的实值 $C^{(2)}$ 光滑函数 $\varphi$,使得

Ⅰ) $D\cap U=\{z\in U:\varphi(z)<0\}$.

Ⅱ) $d\varphi(z^0)\neq 0$,

Ⅲ) 对 $\forall\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in C^n$, $\sum\xi_j\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right|_{z^0}=0$

都有

$$(2.4.6)\qquad L_{z^0}(\varphi;\xi)=\sum_{j,k=1}^{n}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right|_{z^0}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0(>0),\xi\neq 0,$$

则称 $\partial D$ 在点 $z^0$ 是**拟凸的**(**强拟凸**)的如果 $\partial D$ 上每一点都是拟凸的(强拟凸的),则 $D$ 称为**拟凸域**(**强拟凸域**).

(2.4.6)所定义的 Hermitian 形式 $L_{z^0}(\varphi,\xi)$ 称为 **Levi 形式**或 $C^{(2)}$ 光滑函数在点 $z^0$ 的**复 Hessian**,条件 Ⅲ)称为 **Levi 条件**,在条件(2.4.6)下,$C^{(2)}$ 光滑函数 $\varphi$ 是一多次调和函数(定理 2.3.4),所以 *Levi* 凸性在全纯坐标变换下是不变的(定理 2.3.5).

我们可以证明上述定义中函数 $\varphi$ 的选取是有一定程度的任意性的. 对 $\varphi$ 的不同选择,只要它们满足定义中的条件 Ⅰ)和 Ⅱ),对拟凸性和强拟凸性没有影响. 为此我们先证明.

**引理 2.4.1** 设 $D\subset C^n$ 为一区域,边界 $\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 光滑的,$U$ 为开集,$U\cap\partial D\neq 0$. 若 $\varphi,\psi$ 为 $U$ 上满足定义 2.4.1 中条件 Ⅰ),Ⅱ)的二个函数,则在 $U$ 上唯一存在一正的可微函数 $h$ 使得 $\varphi=h\cdot\psi$.

**证明** 我们只要求对 $\forall\ z^0\in\bigcup\cap\partial D$ 存在邻域 $\vee(z^0)\subset U$,在 $\vee$ 上存在唯一可微函数 $h$ 使 $\varphi|_v=h\cdot(\psi|_v)$ 即可. 因为 $d\varphi\neq 0$,不妨假定 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|_{z^0}\neq 0$,于是由隐函数存在定理,存在 $z^0$ 的一个邻域 Z,唯一地解出

$$x_1=\sigma(x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n).$$

设 $x_1<\sigma(x_2,x_3,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ 对应着 $\varphi<0$,作坐标变换 $\Phi$:

$$(2.4.7)\quad \begin{cases} u_1=x_1-\sigma(x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\\ u_2=x_2\\ \cdots\cdots\\ v_n=y_n\end{cases}$$

于是函数 $\tilde{\varphi}(u,v)=\varphi\circ\Phi^{-1}(u)$ 与 $\tilde{\psi}(u,v)=\psi\circ\Phi^{-1}(u)$ 在 $w^0=\Phi(z^0)$ 的某个领域 $W$ 内是二次可微的,不失一般性,假定 $w^0=0$,$W$ 为适当大的一个凸域. 定义

$$h_1(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_1}(tu_1,u_2,\cdots,v_n)dt,$$

$$h_2(u,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u_1}(tu_1,u_2,\cdots,v_n)dt,$$

则

$$\begin{aligned}u_1h_1(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)&=\int_0^1\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial u_1}(tu_1,u_2,\cdots,v_n)d(u_1t)\\&=\tilde{\varphi}(u_1,u_2,\cdots,v_n)\end{aligned}$$

$$(\because\tilde{\varphi}(0,u_2,\cdots,v_n)=0)$$

即

$$\widetilde{\varphi} = h_1 u_1.$$

同理

$$\widetilde{\psi} = h_2 u_1.$$

因为 $d\varphi|_{z^0} \neq 0, d\psi|_{z^0} \neq 0$，所以在 0 点的某个领域内，$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial u_1}$ 与 $\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial u_1}$ 不等于 0，从而它们的积分 $h_1$ 和 $h_2$ 在 0 点的某个领域内也不等于 0，因此 $\widetilde{h} = \frac{h_1}{h_2}$ 在 0 点的某个领域内可微，从而 $h = \widetilde{h} \circ \Phi$ 在 $z^0$ 的某个领域内可微. 于是

$$\begin{aligned} h(z) \cdot \psi(z) &= (h \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi(z) \cdot (\psi \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi(z) \\ &= \widetilde{h} \circ \Phi(z) \cdot \widetilde{\psi} \circ \Phi(z) \\ &= (\widetilde{h} \cdot \widetilde{\psi}) \circ \Phi(z) \\ &= (\frac{h_1}{h_2} \cdot \widetilde{\psi}) \circ \Phi(z) = (\frac{\widetilde{\varphi}}{\widetilde{\psi}} \cdot \widetilde{\psi}) \circ \Phi(z) \\ &= \widetilde{\varphi} \circ \Phi(z) = \varphi(z). \end{aligned}$$

至于 $h$ 在 $\partial D$ 上为正这一点，可以从 $d\varphi = h \cdot d\psi + \psi \cdot dh$ 限制在 $\partial D$ 上看出，这时 $d\varphi = h \cdot d\psi$ 而 $d\varphi \neq 0, d\psi \neq 0$ 因而 $h \neq 0$，但在 $D$ 中 $\varphi$ 和 $\psi$ 同号，故 $h > 0$. □

**定理 2.4.1** 设 $D \subset C^n$ 为具有 $C^{(2)}$ 光滑边界的区域，$z^0 \in \partial D$，$U$ 是 $z^0$ 的一个邻域. 设 $\varphi, \psi$ 是 $U$ 上的二个满足定义 2.4.1 中的条件 Ⅰ)，Ⅱ) 的函数，那末若 $\varphi$ 满足 Levi 条件，则 $\psi$ 是满足 Levi 条件.

**证明** 由引理 2.4.1，我们可以找到正的二次可微函数 $h$ 使 $\varphi = h \cdot \psi$. 若在 $z^0$，$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z^0) \cdot \xi_j = 0$ 则在 $z^0$

$$0 = \sum \left( h \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z_j} + \psi \cdot \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) \xi_j = h \cdot \sum \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \xi_j,$$

因为 $h(z^0) \neq 0$，所以 $\sum \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \xi_j = 0$，经计算我们有

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k=\left(\sum_{j,k}\frac{\partial h}{\partial\bar{z}_K}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}+\sum_{j,k}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_K}\frac{\partial h}{\partial z_j}\right.$$

$$\left.+\sum_{j,k}h\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}+\sum_{j,k}\psi\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\right)\xi_j\bar{\xi}_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial\bar{z}_K}\bar{\xi}_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\xi_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial z_j}\xi_j\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_k}\xi_k$$

$$+h\cdot\sum_{j,k}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k+\psi\cdot\sum_{j,k}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k,$$

由$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的取法，第一、二项为 0，又在 $z^0\in\partial D$，$\psi(z^0)=0$，最后一项也消失，而在 $z^0$，$h\neq 0$，因此 $\varphi$ 与 $\psi$ 的 Levi 形式相同，这就证明了定理的结论.□

从定理的证明过程可以看出，区域 $D$ 在点 $z^0$ 的拟凸或强拟凸的定义以及定义函数的选取无关这一事实，是依赖于定义函数 $\varphi$ 在点 $z^0$ 的复 Hessian 限制在点 $z^0$ 的复切平面时的半正定与正定，如无这种限制，拟凸与否将不能保持与定义函数的选取无关，但是在强拟凸的情况，我们却总可以选取一个适当的定义函数，它的复 Hessian 对任意非零的 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in C^n$ 都是正定的.

**定理 2.4.2** 设 $D\subset C^n$ 在 $z^0$ 点强拟凸，则在 $z^0$ 的某个邻域内存在定义函数 $\varphi$，使

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k>0,\forall\ (\xi_1,\cdots,\xi_n)\in C^n.$$

**证明** 设 $\rho$ 是 $D$ 在 $z^0$ 点的某个邻域内的定义函数，它在 $z^0$ 点的复切平面上是正定的，显然对任意的正实数 $a$，$e^{a\rho}-1$ 也是 $D$ 在 $z^0$ 的定义函数，我们的目的是选取适当的 $a$，使 $\varphi=e^{a\rho}-1$ 满足定理的条件. 由于

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2(e^{a\rho}-1)}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k=a^2e^{a\rho}\left|\sum_j\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\xi_j\right|^2+ae^{a\rho}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k$$

现考虑 $C^n$ 的单位球面 $S^n=\{\xi\in C^n:\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2=1\}$，对任一 $\xi\in S^n$，

按下述方法找一 $\xi$ 在 $S^n$ 的开邻域：

Ⅰ）如 $\xi$ 满足 $\sum_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\xi_j = 0$，则由强拟凸性，$\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_K}\xi_j\bar{\xi}_k >$ 0，存在一邻域 $U_\xi$，使 $\tilde{\xi}\in U_\xi$ 时，仍有 $\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_K}(z^0)\tilde{\xi}_j\bar{\tilde{\xi}}_k > 0$，.

Ⅱ）如 $\xi$ 满足 $\sum_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\xi_j \neq 0$，则可找到 $\xi$ 的足够小邻域 $U_\xi$，使 $\tilde{\xi}\in U_\xi$ 时，仍有 $\sum_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\tilde{\xi}_j \neq 0$. 命

$$a_\xi = \max\left[1, \sup_{\tilde{\xi}\in U_\xi}\left(1 - \frac{\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}(z^0)\tilde{\xi}_j\bar{\tilde{\xi}}_k}{\left|\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\tilde{\xi}_j\right|^2}\right)\right]$$

则易见，当 $a \geqslant a_\xi$，$\tilde{\xi}\in U_\xi$ 时，有

$$\sum \frac{\partial^2(e^{a\rho}-1)}{\partial z_j\partial \bar{z}_K}(z^0)\tilde{\xi}_j\bar{\tilde{\xi}}_k =$$

$$ae^{a\rho}\left[a\left|\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\tilde{\xi}_j\right|^2 + \sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}(z^0)\tilde{\xi}_j\bar{\tilde{\xi}}_k\right]$$

$$\geqslant ae^{a\rho}\left[a_\xi\left|\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\tilde{\xi}_j\right|^2 + \sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}(z^0)\tilde{\xi}_j\bar{\tilde{\xi}}_k\right]$$

$$\geqslant ae^{a\rho}\left|\sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z^0)\tilde{\xi}_j\right|^2 > 0.$$

由于 $S^n$ 是紧的，故存在有限个 $U_{\xi^1},\cdots,U_{\xi^l}$ 盖住 $S^n$，取

$$a_p = \begin{cases} 1，若 \sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}\xi_j^p = 0, \\ a_{\xi^p}，若 \sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}\xi_j^p \neq 0. \end{cases}$$ 并令

$$a = \max_{1\leqslant p\leqslant l} a_p$$

则对任何 $\xi \in S^n$，都有

$$\sum \frac{\partial^2(e^{a\rho}-1)}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}(z^0)\xi_j\bar{\xi}_k > 0,$$

令 $\varphi = e^{a\rho} - 1$，即得所证. □

下面的定理表明强拟凸是在全纯坐标变换下的欧氏凸.

**定理 2.4.3** 假设 $D \subset C^n$ 是区域，$D$ 在点 $z^0 \in \partial D$ 是强拟凸的，那末存在一全纯坐标系，使 $\partial D$ 对新坐标系而言是强欧氏凸的.

**证明** 设 $D$ 在点 $z^0$ 的定义函数为 $\varphi$，即存在 $z^0$ 的邻域 $U(z^0)$，使 $D \cap U(z^0) = \{z \in C^n : \varphi(z) < 0\}$，不失一般性，可设 $z^0$ 为原点，并且 $\varphi$ 就是定理 2.4.2 中的定义函数，如果在原点 $O$ 附近按实坐标 $(x_1, \cdots, x_{2n})$ 展开 $\varphi$，则

$$\varphi = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(0)x_j + \sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}(O)x_j x_k + O(|x^3|)$$

那末 $\partial D$ 在原点 $O$ 强欧氏凸的充分条件为 $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}(O)\right) > 0$. 如果按复坐标 $z$ 展开 $\varphi$，则

$$\varphi = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0)z_j + \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_j}(0)\bar{z}_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial z_k}(0)z_j z_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k}(0)\bar{z}_j \bar{z}_k + \sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0)z_j \bar{z}_k + 0(|z|^3).$$

由定理 2.4.2 知对非零的 $(z_1, \cdots, z_n)$ 上式右端的 $\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0)z_j \bar{z}_k > 0$. 如果我们能找到一适当的全纯坐标系 $(w_1, \cdots, w_n)$ 使

$\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j \partial w_k}(0)w_j w_k = 0$，这时当然也有

$\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{w}_j \partial \bar{w}_k}(0)\bar{w}_j \bar{w}_k = 0$，

则定理的结论就已证明. 为此首先对坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 施行一线性变换（新的坐标仍记为 $(z_1, \cdots, z_n)$），使

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(0) = 1, \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0) = 0, \forall\ j > 1.$$

再作全纯变换

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta, a_{\alpha\beta} \text{ 待定} \\ z_j = w_j, j > 1 \end{cases}$$

由于 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j\partial w_k}=\sum_{\alpha、\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial w_j}\frac{\partial z_\beta}{\partial w_k}+\sum_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial z_\alpha}\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial w_j\partial w_k}$

因此 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j\partial w_k}(0)=\sum_{\alpha、\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}(0)\delta_{\alpha j}\delta_{\beta k}+a_{jk}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(0)+a_{jk}$

如取

$a_{jk}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(0)$，则$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j\partial w_k}(0)=0$，同时也就有$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{w}_j\partial\bar{w}_k}(0)=0$，这时

$$\varphi=\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial w_j}(0)w_j+\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{w}_j}(0)\bar{w}_j+\sum_{j、k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j\partial\bar{w}_k}(0)w_j\bar{w}_k+0(|w|^3),$$

对新坐标系$(w_1,\cdots,w_n)$二次项只有$\sum_{j、k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_j\partial\bar{w}_k}(0)w_j\bar{w}_k$，这时强拟凸和强欧氏凸一致. □

下面将要证明具 $C^{(2)}$ 光滑边界的全纯域是拟凸域. 根据 Cartan-Thullen 定理，全纯域就是全纯凸域. 但是要判别一域 $D$ 的全纯凸性时，必须对紧集 $K\subset\subset D$，找出它的全纯凸包 $\hat{K}$，这事并不容易，为此我们常选用一特殊的紧集 $K$，例如，设 $\triangle$ 是 $C^1$ 平面上的圆盘，考虑一族映射.

$\varphi_\nu:\bar{\triangle}\to D,\nu=1,2,\cdots.\ \varphi_\nu$ 在 $\bar{\triangle}$ 上连续，在 $\triangle$ 全纯. 我们就取 $K=\overline{\bigcup\varphi_\nu(\partial\triangle)}$. 我们有下面的

**定义 2.4.2**(圆盘性质) 我们称 $C^n$ 中的域 $D$ 具有**圆盘性质**，如果对 $C^1$ 中的圆盘 $\triangle$，存在一簇映射.

$\varphi_\nu:\bar{\triangle}\to D,\nu=1,2,\cdots.\ \varphi_\nu$ 在 $\bar{\triangle}$ 上连续，在 $\triangle$ 全纯，使得当 $\bigcup_{\nu=1}^\infty\varphi_\nu(\partial\triangle)\subset\subset D$ 时就有 $\bigcup_{\nu=1}^\infty\varphi_\nu(\triangle)\subset\subset D$.

**定理 2.4.4.** 若 $D\subset C^n$ 为全纯域，则 $D$ 具有圆盘性质.

**证明** 设 $\{\varphi_\nu\}$ 为圆盘性质定义中的一族映射. 取 $K=\overline{\bigcup_\nu\varphi_\nu(\partial\triangle)}$，设 $D$ 为全纯域，因而全纯凸，由此可证明. $\overline{\bigcup_\nu\varphi_\nu(\triangle)}\subset\hat{K}\subset\subset D$.

因为对任何 $f\in A(D),z\in\varphi_\nu(\triangle)$ 由极大值原理可知.

$$|f(z)| = |f\circ\varphi_\nu(\triangle)| \leqslant \sup|f\circ\varphi_\nu(\partial\triangle)|$$
$$\leqslant \sup_{z\in\overline{\bigcup_\nu\varphi_\nu(\partial\triangle)}}|f(z)| = \sup_{z\in K}|f(z)|$$

由于 $D$ 是全纯凸，$\hat{K}$ 中的任何点都满足上述不等式，所以 $\overline{\bigcup_\nu\varphi_\nu(\triangle)} \subset \hat{K} \subset\subset D$. □

**定理 2.4.5** 设 $D\subset C^n$ 是具有 $C^{(2)}$ 光滑边界的全纯域，则 $D$ 是拟凸域.

**证明** 证明采用反证法，设 $\varphi$ 为 $D$ 的定义函数，假定存在 $z^0\in\partial D$ 及 $\xi^0=(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0)$ 使

$$(2.4.8)\quad \sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\xi_j^0=0,\ \sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z^0)\xi_j^0\bar{\xi}_k^0<0$$

即 $D$ 不是拟凸域. 则可证明这时 $D$ 不能具有圆盘性质，和 $D$ 是全纯域的假设相矛盾. 下面证明这一点.

由于 $\partial D$ 是光滑的，即 $d\varphi(z^0)\neq 0$，不妨设 $\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z^0)\neq 0$，作全纯映射 $\varphi_\nu: C^1\to C^n$:

$$(2.4.9)\quad \varphi_\nu(\zeta)=z^0-\frac{\varepsilon}{\nu}\vec{n}^0+\delta\zeta\xi^0+(a\delta^2\zeta^2,0,\cdots,0),$$

$a$: 某个复常数，其中 $\vec{n}^0$ 是 $\partial D$ 在点 $z^0\in\partial D$ 的外法线. $\varepsilon,\delta$ 是适当小的正数.

证明分三步:

I ) 适当选取 $a$ 可以使

$$z^0-\frac{\varepsilon}{\nu}\vec{n}^0+\delta\zeta\xi^0+(a\delta^2\zeta^2,0,\cdots,0)\in D,0\leqslant\zeta\leqslant 1$$

即 $$\varphi(\varphi_\nu(\zeta))=\varphi(\varphi_\nu(\bar{\triangle})<0,$$

亦即 $$\varphi_\nu(\bar{\triangle})\subset D.$$

设 $z^0+\eta=\varphi_\nu(\zeta)\in D$，则 $\varphi$ 在 $z^0$ 的 Taylor 展开为

$$\varphi(z^0+\eta)=\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\eta_j+\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j}(z^0)\bar{\eta}_j$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(z^0)\eta_j\eta_k+\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_j\partial\bar{z}_k}(z^0)\bar{\eta}_j\bar{\eta}_k$$

$$+\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z^0)\eta_j\bar{\eta}_k+(\text{三次项以上}).$$

由于

$\eta=-\frac{\varepsilon}{v}\vec{n}^0+\delta\zeta\xi^0+(a\delta^2\zeta^2,0,\cdots,0)$，所以

$$\varphi(\varphi_v(\zeta))=-2\mathrm{Re}\left(\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\frac{\varepsilon}{v}\vec{n}_j^0\right)$$

$$+2\mathrm{Re}\left(\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\xi_j^0\right)\delta\zeta+2\mathrm{Re}\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z^0)a\delta^2\zeta^2$$

$$+\mathrm{Re}\left(\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(z^0)\xi_j^0\xi_k^0\right)\delta^2\zeta^2$$

$$+\left(\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\xi_j^0\bar{\xi}_k^0\right)\delta^2|\zeta|^2+0(\delta^3|\zeta|^3).$$

命

$$(2.4.10)\quad a=-\frac{\mathrm{Re}\left(\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(z^0)\xi_j^0\xi_k^0\right)}{2\mathrm{Re}\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(z^0)},$$

则由于$\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\xi_j^0=0$，故

$$(2.4.11)\quad \varphi(\varphi_v(\zeta))=-2\frac{\varepsilon}{v}\mathrm{Re}\left(\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\vec{n}_j^0\right)$$

$$+\left(\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z^0)\xi_j^0\bar{\xi}_j^0\right)\delta|\zeta|^2+0(\delta^3|\zeta|^3).$$

按假定(2.4.8)，$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z^0)\xi_k^0\bar{\xi}_j^0<0$，由于$0(\delta^3|\zeta|^3)$是$\delta|\zeta|$的三阶无穷小，适当选取$\varepsilon$，如$\mathrm{Re}\left(\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z^0)\vec{n}_j^0\right)$是负数则取$\varepsilon$充份小，可使当$0\leqslant|\zeta|\leqslant1$时有

$\varphi(\varphi_v(\zeta))=\varphi(\varphi_v(\bar{\triangle}))<0$，

亦即
$$\varphi_v(\bar{\triangle})\subset D.$$

Ⅱ）再证
$$\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\partial D)\subset\subset D.$$

因为若命

(2.4.12) $\varphi_a(\zeta) = z^0 + \delta\zeta\xi^0 + (a\delta^2\zeta^2, 0, \cdots, 0), 0 < \zeta \leqslant 1$，则对满足 (2.4.10) 的 $a$，也有 $\varphi_a(\zeta) \subset D, 0 < \zeta \leqslant 1$，即有

$$\varphi_a(\partial D) \subset D$$

当取 $\delta$ 充份小时，必可使

$$\varphi_a(\partial D) \subset\subset D,$$

故存在 $\varphi_a(\partial D)$ 的一个闭邻域 $W \subset D$，使当 $\varepsilon$ 充份小时

$$\varphi_\nu(\partial\triangle) = \varphi_a(\partial\triangle) - \frac{\varepsilon}{\nu}\vec{n}^0 \subset W \subset D.$$

故有

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(\partial\triangle) \subset\subset D$$

Ⅲ) 由 (2.4.9) 知 $\quad \lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_\nu(0) = z^0.$

故 $z^0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_\nu(\triangle)$，而 $z^0 \in \partial D$，这就不可能使 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(\triangle) \subset\subset D$ 所以 $D$ 不具圆盘性质，这就和假设 $D$ 是全纯域矛盾. □

## §2.5 多次调和凸性　一般拟凸域

上一节讨论的是具有 $C^{(2)}$ 光滑边界的拟凸域，本节将拟凸域的定义拓广，使它包括边界不光滑的区域. 为此先证明.

**定理 2.5.1** 设 $D \subset C^n$ 为区域，具有圆盘性质，则 $-\log\delta_D(z)$ 在 $D$ 上是多次调和的.

**证明** 采用反证法. 设在 $D$ 上 $-\log\delta_D(z)$ 不是多次调和的，不妨设在 $0 \in D$ 不是多次调和的，则存在一条复线 $wC^1$ 使 $-\log\delta_D(z)$ 在这条复线上不是次调和的.

不失一般性，假设 $w = (1, 0, \cdots, 0)$，于是对充份小的 $r > 0$，有

$$-\log\delta_D(0) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\log\delta_D(re^{i\theta}, 0, \cdots, 0)d\theta.$$

按次调和函数的定义 2.3.1，可知存在调和函数 $h(z_1)$，使

$$h(re^{i\theta}) > -\log\delta_D(re^{i\theta},0,\cdots,0)$$
$$h(0) < -\log\delta_D(0).$$

设 $g$ 是 $h$ 的调和共轭函数，$g(0)=0$，作全纯映射.

$$(1+\varepsilon)\varphi_t(z_1) = (z_1,0,\cdots,0) + te^{-[h(z_1)+ig(z_1)]}\xi^0, \varepsilon > 0.$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 1, \xi^0 = \xi/|\xi|, \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) \in \partial D$. 并设以 $o$ 为心，$|\xi|$ 为半径的球 $B(0,|\xi|) \subset D$，显然 $|\xi| = \delta_D(0)$. 于是对任何 $t \in [0,1]$

$$|(1+\varepsilon t)\varphi_t(re^{i\theta}) - \varphi_0(re^{i\theta})| \leqslant e^{-h(z)} < \delta_D(re^{i\theta},0,\cdots,0),$$

这表示全纯映射序列的象点 $(1+\varepsilon t)\varphi_t(re^{i\theta})$ 和象点 $\varphi_0(re^{i\theta})$ 间距离，对任意的 $0 < t \leqslant 1$，都小于 $D$ 中点 $(re^{i\theta},0,\cdots,0)$ 到边界 $\partial D$ 的距离. 这也就说明

$$(1+\varepsilon t)\varphi_t(z_1) : \bar{\triangle} \to D,$$
$$\bigcup (1+\varepsilon t)\varphi_t(\partial\triangle) \subset\subset D,$$

由于假设 $-\log\delta_D(z)$ 在 $0 \in D$ 不是多次调和的，下面只要说明在点 $0 \in D$ 不满足圆盘性质就行了.

由于

$$|(1+\varepsilon t)\varphi_t(0) - \varphi_0(0)| = te^{-h(0)},$$

如取 $te^{-h(0)} \cdot \delta_D(0) < 1$，则

$$|(1+\varepsilon t)\varphi_t(0) - \varphi_0(0)| = \delta_D(0) = dist(0, C^n\backslash D)$$

因为 $(1+\varepsilon t)\varphi_t(0)$ 的方向为 $\xi^0$，故当 $\varepsilon \to 0$ 时，$(1+\varepsilon t)\varphi_t(0) = \varphi_t(0) \in \partial D$，这时不可能有 $\bigcup (1+\varepsilon t)\varphi_t(\triangle) \subset\subset D$，即与 $D$ 具有圆盘性质矛盾. □

根据定理 2.4.4 全纯域 $D$ 具有圆盘性质，而再根据定理 2.5.1 则 $-\log\delta_D(z)$ 在全纯域 $D$ 上是多次调和的. 同时，我们还可注意到，若 $D$ 为有界域，则当 $z \to \partial D$ 时，$-\log\delta_D(z) \to +\infty$，若 $D$ 为无界域，则 $\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 - \log\delta_D(z)$，当 $z \to \partial D$ 时，也趋于 $+\infty$. 所以函数 $-$

$\log\delta_D(z)$ 有特殊的函数论意义. 为了进一步讨论，我们先介绍

**定义 2.5.1** 设 $D \subset C^n$ 为区域，$\varphi$ 为 $D$ 上的一个多次调和函数，若对每一个实数 $C$，点集 $\{z \in D : \varphi(z) \leqslant C\} \subset\subset D$，则称 $\varphi$ 是 $D$ 上的一个**多次调和穷竭函数**. 如果 $\varphi$ 还是强多次调和的，则称 $\varphi$ 为**强多次调和穷竭函数**.

当 $D$ 有界且具有圆盘性质时，$-\log\delta_D(z)$ 就是 $D$ 上的一个多次调和穷竭函数，而且是连续的.

**定义 2.5.2**(多次调和凸) 一区域 $D \subset C^n$ 称为**多次调和凸的**（$= PS$ 一凸），如果对每一紧集 $K \subset\subset D$，它的**多次调和凸包**

$$\hat{K}_{ps(D)} = \{z \in D : u(z) \leqslant \sup_K u, \forall\ u \in ps(D)\}$$

在 $D$ 中是相对紧的.

**定理 2.5.2** 如果 $D \subset C^n$ 是全纯域，则 $D$ 是多次调和凸的.

**证明** 假设 $f \in A(D)$，则 $|f| \in PS(D)$，因此对每一紧集 $K \subset\subset D$ 有

$$\begin{aligned} z \in \hat{K}_{ps(D)} &\Leftrightarrow u(z) \leqslant \sup_K u,\ \forall\ u \in ps(D) \\ &\Rightarrow |f(z)| \leqslant \sup_k |f|, \forall\ f \in A(D) \\ &\Rightarrow z \in \hat{K}. \end{aligned}$$

故 $\hat{K}_{ps(D)} \subseteq \hat{K} \subset\subset D$，定理得证. □

**定理 2.5.3** 如 $D \subset C^n$ 是多次调和凸的，则 $D$ 具有圆盘性质.

**证明** 设圆盘性质定义中映射族为

$$\varphi_\nu : \bar{\triangle} \to D, \varphi_\nu \in A(D) \cap C(\bar{\triangle}), \nu = 1,2,\cdots$$

命 $K = \overline{\bigcup_\nu \varphi_\nu(\partial\triangle)} \subset\subset D$. 任取 $u \in PS(D)$，由于 $u \circ \varphi_\nu$ 是次调和的，由次调和函数的极大值原理，对 $z \in \varphi_\nu(\triangle)$ 有

$$\begin{aligned} u(z) = u \circ \varphi_\nu(\triangle) &\leqslant \sup u \circ \varphi_\nu(\partial\triangle) \\ &\leqslant \sup_{z \in \overline{\bigcup_\nu \varphi_\nu(\partial\triangle)} = K} u(z). \end{aligned}$$

故 $\varphi_\nu(\triangle) \subset \hat{K}_{ps(D)} \Rightarrow \bigcup_\nu \varphi_\nu(\partial\triangle) \subseteq \hat{K}_{ps(D)} \subset\subset D$.

最后一个式子是由于 $D$ 是多次调和凸的. 所以 $D$ 具有圆盘性质. □

**定理 2.5.4** 设 $D$ 是 $C^n$ 中的域,以下三个条件是等价的:

(Ⅰ) $-\log\delta_D(z)$ 在 $D$ 中是多次调和的.

(Ⅱ) 在 $D$ 上存在一个连续的多次调和穷竭函数.

(Ⅲ) $D$ 是多次调和凸的.

**证明** (Ⅰ)⇒(Ⅱ). 显然 $\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2-\log\delta_D(z)$ 就是 $D$ 上的一个连续的多次调和穷竭函数.

(Ⅱ)⇒(Ⅲ),命 $u\in PS(D)$ 为 $D$ 上的连续多次调和穷竭函数,如果 $K\subset\subset D$ 是紧的,命 $C=\max\limits_{K}u<\infty$. 那末,在 $\hat{K}_{ps(D)}$ 上 $u\leqslant c$,因此 $\hat{K}_{ps(D)}\subset\{z\in D: u(z)\leqslant C\}\subset\subset D$. 即 $D$ 是多次调和凸的.

(Ⅲ)⇒(Ⅰ). 因为 $D$ 是多次调和凸的. 由定理 2.5.3,$D$ 具有圆盘性质,再由定理 2.5.1 知道 $-\log\delta_D(z)$ 在 $D$ 是多次调和的. □

**定义 2.5.3**(一般拟凸域) 设 $D$ 为 $C^n$ 中的域,满足定理 2.5.4 中的任一个条件,则称 $D$ 为**拟凸域**.

**定理 2.5.5** 设域 $D\subset C^n$ 为定义 2.5.3 中的拟凸域,当且仅当 $D$ 具有圆盘性质.

**证明** 定理 2.5.4 中的三个条件是等价的,我们只对条件(Ⅱ)来证明,若 $D$ 具有圆盘性质,则由定理 2.5.1 知道 $-\log\delta_D(z)$ 在 $D$ 中是多次调和的,于是若 $D$ 是有界的,可取 $-\log\delta_D(z)$ 为多次调和穷竭函数,因此 $D$ 是拟凸域;若 $D$ 无界,则可取 $\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2-\log\delta_D(z)$ 为多次调和穷竭函数,因此 $D$ 也是拟凸域.

反之,若 $D$ 为拟凸域,$u$ 为 $D$ 上的一个连续多次调和穷竭函数,$\{\varphi_\nu\}$ 为定义在圆盘 $\triangle$ 上的一族映射,$\varphi_\nu(\overline{\triangle})\subset D$,$\overline{\bigcup\varphi_\nu(\partial D)}\subset\subset D$,则存在常数 $C$,使得在 $\overline{\bigcup\varphi_\nu(\partial D)}$ 上 $u<C$,由多次调和函数的最大模原理,可知在 $\bigcup\varphi_\nu(\triangle)$ 上 $u<C$,因此 $\bigcup\varphi_\nu(\triangle)\subset\subset D$,从而 $D$ 具有圆盘性质. □

由定理 2.4.4 和定理 2.5.5 立得

**定理 2.5.6** 设 $D\subset C^n$ 是全纯域，则 $D$ 是拟凸域(按定义 2.5.3)

**定理 2.5.7** 若域 $D\subset C^n$ 具有 $C^{(2)}$ 光滑边界，则拟凸域的定义 2.4.1 和定义 2.5.3 等价.

**证明** (Ⅰ) 定义 2.5.3⇒ 定义 2.4.1：

按定义 2.5.3 $-\log\delta_D(z)$ 是 $D$ 上的多次调和函数，且在接近 $\partial D$ 的点 $z\in D$，它是 $C^{(2)}$ 的，于是对接近 $\partial D$ 的点 $z\in D$，

$$\left(\frac{\partial^2(-\log\delta_D(z))}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}=\left(-\frac{1}{\delta_D}\frac{\partial^2\delta_D}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}+\frac{1}{\delta_D^2}\frac{\partial\delta_D}{\partial z_j}\frac{\partial\delta_D}{\partial\bar{z}_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}\geqslant 0.$$

取

$$(2.5.1)\qquad r(z)=\begin{cases}-\delta_D(z) & ,z\in D\\ 0 & ,z\in\partial D\\ \operatorname{dist}(z,\partial D) & z\in C^n\backslash D\end{cases}$$

作为 $D$ 的定义函数，对接近 $\partial D$ 的点 $z\in D$，有

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial r}{\partial\bar{z}_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}\geqslant 0.$$

若取 $\xi$ 使 $\sum\frac{\partial r}{\partial z_j}\xi_j=0$，则有

$$\sum\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0.$$

命 $z\to\partial D$，即知 $D$ 满足定义 2.4.1.

(Ⅱ) 定义 2.4.1⇒ 定义 2.5.3：

取(2.5.1) 中的 $r(z)$ 为 $D$ 的定义函数，按定义 2.4.1 有

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0,\ \sum_j\frac{\partial r}{\partial z_j}\xi_j=0,z\in\partial D.$$

则当 $z$ 充份接近 $\partial D$ 时，$-\log\delta_D(z)$ 是 $C^{(2)}$ 光滑的，而且是多次调和的，如若不然，则对充份接近 $\partial D$ 的点 $z\in D$，及 $\omega\in C^n$，在 $\tau=0$ 时，有

$$C=\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}}\log\delta_D(z+\tau\omega)\big|_{\tau=0}>0,\tau\in C^1.$$

现在 $z$ 点展开 $\log\delta_D(z+\tau\omega)$：

(2.5.2) $\log\delta_D(z+\tau\omega)=\log\delta_D(z)+Re(A\tau+B\tau^2)$

$$+C|\tau|^2+0(|\tau|^2),C>0,\tau\to 0.$$

其中 $A$ 与 $B$ 是常数，取 $a$ 为点 $z$ 到 $\partial D$ 的距离为最短的那个向量，即 $z+a\in\partial D$，$|a|=\delta_D(z)$。定义复直线

(2.5.3) $$z(\tau)=z+\tau\omega+ae^{A\tau+B\tau^2}.$$

由(2.5.2)

(2.5.4) $\delta_D(z+\tau\omega)\geqslant|e^{A\tau+B\tau^2}|e^{c/2|\tau|^2}\delta_D(z),\delta_D(z)=|a|.$

若 $z+\tau\omega\in D$，对(2.5.3)和(2.5.4)应用三角不等式，我们有

(2.5.5) $$\delta_D(z(\tau))\geqslant\delta_D(z+\tau\omega)-|a||e^{A\tau+B\tau^2}|$$

$$\geqslant|e^{A\tau+B\tau^2}||a|(e^{c/2|\tau|^2}-1).$$

故除 $\tau=0$ 以外，都有 $\delta_D(z(\tau))>0$，此即表示存在一实数 $\eta>0$，当 $|\tau|<\eta$ 时，除了 $z(0)\in\partial D$ 以外，其余的 $z(\tau)$ 都属于 $D$，所以 $z(\tau)$ 在 $z(0)$ 处切于 $\partial D$。

因为

$$\delta_D(z(\tau))\geqslant|a||1+A\tau+B\tau^2+0(|\tau|^2)|\left(\frac{c}{2}|\tau|^2+0(|\tau|^2)\right)$$

$$\geqslant\frac{c}{4}|\tau|^2|a|,$$

所以

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar\tau}\delta_D(z(\tau))|_{\tau=0}\geqslant\frac{c}{4}|a|>0.$$

现在点 $z(0)\in\partial D$ 的附近，取定义函数为

$$r(z)=\begin{cases}-\delta_D(z) & ,z\in D\\ 0 & ,z\in\partial D\\ \text{dist}(z,\partial D) & z\in C^n\backslash D\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar\tau}\delta_D(z(\tau))\Bigg|_{\tau=0}=\sum_{j,k}\frac{\partial^2\delta_D(z(\tau))}{\partial z_j\partial\bar z_k}\frac{\partial z_j}{\partial\tau}\frac{\partial\bar z_k}{\partial\tau}\Bigg|_{\tau=0}>0$$

即$\sum_{j,k}\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k < 0$，$\sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j}\xi_j = 0$(因为 $z(\tau)$ 在 $z(0)$ 处切于 $\partial D$)，其中 $\xi_j = \left.\frac{\partial z_j(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$，$z_j(\tau)$ 为复直线的第 $j$ 个分量，这与 $r$ 为定义 2.4.1 中拟凸域的定义函数矛盾. □

**注**：拟凸域的定义 2.4.1 要求边界是 $C^{(2)}$ 光滑的，比较直观，容易计算；拟凸域的定义 2.5.3 则对边界的光滑性没有要求，容易拓广到复流形上去.

## §2.6 Levi 问题　逼近定理

### 2.6.1 Levi 问题

定理 2.4.5 和定理 2.5.6 我们证明了全纯域是拟凸域，这个定理的逆定理是：拟凸域是不是全纯域？这就是著名的 Levi 问题，这是 1911 年 E. E. Levi[1911] 提出来的，他在这篇论文中得到这个问题的局部解答，即证明了：如果 $D$ 是强拟凸的，那末对每一点 $P \in \partial D$ 都有一个邻域 $U$ 使得 $U \cap D$ 是一(弱) 全纯域. 他在这篇论文中还得出了要得到整体结果的主要困难是必须找到一个在 $D$ 全纯的函数，这个全纯函数在 $\zeta \in \partial D$ 是完全奇异的(即边界 $\partial D$ 上的点都是它的奇点)，而不是仅仅找一个在 $\zeta \in \partial D$ 的邻域 $U \cap D$ 上的全纯函数，也就是这个著名的 Levi 问题要构造具有某些特殊局部性质的整体全纯函数，这种问题在复分析中是最为困难的.

Levi 问题最早由 *K. Oka* 在 1942 年解决了 $C^2$ 的情形(*K. Oka*[1984] 论文集的第 Ⅵ 篇)，任意维的情形是在 1950 年代初由 *K. Oka*(*K. Oka*[1984] 论文集的第 Ⅸ 篇)，H. Bermermann[1954]，F. Norguet[1954] 等人分别独立解决的，$C^n$ 中的 Levi 问题和以后在更抽象的空间中的 Levi 问题的解决，导致发展了许多有效的方法，例如多重次调和函数，全纯函数局部环的代数“凝聚理论”，凝聚层的上同调理论和非齐次 Cauchy-Riemann 方程的整体解和估计，复流

形上的 Levi 问题是由 H. Grauert 在 1958 年用层论方法解决的(H. Grauert[1958]). 复空间上的 Levi 问题是 R. Narasimhan 在 1962 年解决的 (R. Narasimhan[1962]). 60 年代中期, J. J. Kohn, A. Andreotti, E. Vesentini, 及 L. Hörmander (L. Hörmander[1965][1973]) 等用 $\bar{\partial}$ 一算子的 $L^2$ 估计简单地解决了 Levi 问题. 70 年代初产生了非齐 Canchy-Riemann 方程的积分表示理论后, $C^n$ 空间的 Levi 问题又可以用积分表示的方法来解决(G. M. Henkin and J. Leiterer[1983] 和 R. M. Range[1986]).

**2.6.2 逼近定理** 在此我们证明一个拟凸域用一列强拟凸域来逼近的定理 2.6.1, 有了这个定理和全纯域可用一列全纯域逼近的定理 2.2.7, Levi 问题就只要对强拟凸域来解就行了. 为此证明几个引理.

**引理 2.6.1** 设 $\varphi$ 是域 $D \subset C^n$ 上的连续多次调和函数, 则存在一列光滑的强多次调和函数 $\{\varphi_\varepsilon\}$, $\varphi_\varepsilon \in C^\infty$ 在 $D$ 的任一紧集上单调下降地一致收敛于 $\varphi$.

**证明** 设 $f \in C_0^\infty(C^n)$ 是非负函数, $f(z) = f(|z|)$, $\int_{C^n} f dv = 1$, 且 $\operatorname{supp} f \subset \{z \in C^n : \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 1\}$. 命 $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{z \in D : \delta_D(z) > \varepsilon\}$. 对 $z \in D_\varepsilon$, 定义函数

$$(2.6.1) \qquad \widetilde{\varphi_\varepsilon}(z) = \int_{C^n} \varphi(z - \varepsilon\eta) f(\eta) dv_\eta.$$

Ⅰ) $\widetilde{\varphi_\varepsilon}$ 是 $C^\infty$ 是多次调和函数

因为

$$(2.6.2) \quad \widetilde{\varphi_\varepsilon}(z) = \int_{C^n} \varphi(z - \varepsilon\eta) f(\eta) dv_\eta = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{C^n} \varphi(\zeta) \left(\frac{z - \zeta}{\varepsilon}\right) dv_\zeta, \ (z - \varepsilon\eta) = \zeta),$$

由于 $f \in C_0^\infty(C^n)$, 虽然 $\widetilde{\varphi_\varepsilon}(z)$ 是 $C^\infty$ 函数, 取复线 $z + aC^1$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\varphi_\varepsilon}(z+are^{i\theta})d\theta=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{C^n}\varphi(z+are^{i\theta}-\varepsilon\eta)f(\eta)dv_\eta d\theta$$

$$=\int_{C^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z+are^{i\theta}-\varepsilon\eta)d\theta\right)f(\eta)dv_\eta$$

$$\geqslant\int_{C^n}\varphi(z-\varepsilon\eta)f(\eta)dv_\eta$$（由假设 $\varphi$ 是 $D$ 上的多次调和函数）

$$=\widetilde{\varphi_\varepsilon}(z).$$

此即表示 $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z)$ 是多次调和函数.

Ⅱ）$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时是单调下降函数

作函数

(2.6.3) $$g(\alpha)=\int_{C^n}\varphi(z-\alpha\eta)f(\eta)dv_\eta=\frac{1}{|\alpha|^n}\int_{C^n}\varphi(\zeta)f\left(\frac{z-\zeta}{\alpha}\right)dv_\zeta,$$
$$(z-\alpha\eta=\zeta),$$

其中 $\alpha\in C^1$，当 $\alpha=\varepsilon e^{i\theta}$ 时，有 $g(\alpha)=g(\varepsilon)=\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z)$ 和上面证明 $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z)$ 是多次调和时一样，容易验证明对固定的 $z$，$g(\alpha)$ 是 $\alpha$ 的次调和函数，因此

$$\varphi(z)=\widetilde{\varphi}_0(z)=g(0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varepsilon e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varepsilon)d\theta$$

$$=g(\varepsilon)=\widetilde{\varphi_\varepsilon}(z).$$

由次调和函数的最大值原理，除非 $g$ 是常数，$g(\varepsilon)$ 即 $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z)$ 必须单调下降.

Ⅲ）取

(2.6.4) $$\varphi_\varepsilon=\widetilde{\varphi}_\varepsilon+\varepsilon\sum_{j=1}^n|z_j|^2,\varepsilon>0.$$

容易验证 $\left(\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right)>0$，即 $\{\varphi_\varepsilon\}$ 为单调下降的 $C^\infty$ 强多次调和函数列，在 $D$ 点点收敛于 $\varphi$，由 Dini 定理可知在 $D$ 上内闭一致收敛于 $\varphi$. □

**引理 2.6.2**(Sard 定理)　如果 $f: D \to R^1$ 是 $C^\infty$ 函数,那末点集 $A = \{z \in D: df = 0\}$ 的象集 $f(A)$ 在 $R^1$ 中的测度为零.

证明参见 R. Narasimhan[1973] § 1.4.

**定理 2.6.1**　若 $D \subset C^n$ 是拟凸域,则存在一列强拟凸域$\{D_j\}$, $D_j \subset D_{j+1}, j = 1,2,\cdots$,使 $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$

**证明**　由于$D$是拟凸域,由定理 2.5.5,$D$具有圆盘性质,再由定理 2.5.1. $-\log\delta_D(z)$ 是 $D$ 上的连续多次调和函数,显然 $-\log\delta_D(z) + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$ 就是$D$上的连续多次调和穷竭函数,记为$\varphi$,设$\{\varphi_\varepsilon\}$ 为引理 2.6.1 中的函数列.

记 $D'_j = \{z \in D: \varphi(z) < j\}$. 取 $\varepsilon_j$ 充份小,使得在$\widetilde{D'}_{j+1}$上成立.

(2.6.4)
$$\varphi < \varphi_{\varepsilon_j} < \varphi + \frac{1}{2}.$$

由 Sard 定理,存在实数 $C_j \in [j + \frac{1}{2}, j + \frac{3}{4}]$ 使得在每个满足 $\varphi_{\varepsilon_j}(z) = C_j$ 的点 $z$,有 $d\varphi_{\varepsilon_j}(z) \neq 0$. 于是 $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_j} = \varphi_{\varepsilon_j} - C_j$ 可作为开集

(2.6.5)
$$D_j = \{z \in D'_{j+1}: \widetilde{\varphi}_{\varepsilon_j} < 0\}$$

的定义函数,因为 $\varphi_{\varepsilon_j}$ 是光滑的强多次调和函数,且 $d\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_j}(z) = d\varphi_{\varepsilon_j}(z) \neq 0$,所以 $D_j$ 是强拟凸的,并有

(2.6.6)
$$D'_j \subset D_j \subset D'_{j+1}.$$

重复这个步骤,并取相应的一个连通分支仍保持从属关系(2.6.6),就得到一列强拟凸域$\{D_j\}$,$D_j \subset D_{j+1}$,并且有 $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$. □

## 第二章　参考文献


肖荫堂[1979]

张锦豪[1982]

L. Hörmander[1965][1973]

E. E. Levi[1910][1911]

R. Narasimham[1973]

钟家庆[1983]

H. Bremerman[1954]

H. Cartan and P. Thullen[1932]

H. Grauert[1958]

F. Hartogs[1906]

G. M. Henkin and J. Leiterer[1983]

F. Norguet[1954]

K. Oka[1984]

R. M. Range[1986]

# 第三章　微分形式和 Hermite 几何

多复变数所在的空间是高维空间，所以多复数研究的对象必然是流形. 本章第一节介绍实微分流形上的微积分，首先介绍微分流形的概念，切空间和余切空间，微分形式和外微分运算及流形的定向，最后介绍外微分式的积分和 Stokes 公式，这些内容是 $C^n$ 空间和复流形上的复分析的基础. 第二节介绍流形的剖分和 deRham 上同调群. 本章第三节介绍 Hermite 几何，首先介绍复流形的概念，复结构，复向量丛上的连络然后介绍 Hermite 流形和 $K\ddot{a}hler$ 流形，这些内容是复流形上的复分析的基础.

## §3.1　实微分流形上的微积分

### 3.1.1　微分流形

**定义 3.1.1**　**(微分流形)一个** $C^{(k)}, 1 \leqslant k \leqslant \infty$，**类的** $n$ **维微分流形** $M$，是一个 Hausdorff 拓扑空间，它具有一由配对 $(U_i, \varphi_i)$ 组成的 $C^{(k)}$ 类**坐标卡**(atlas)**集** $\mathscr{A} = \{(U, \varphi_i), i \in I\}$，其中 $U_i \subset M$ 是开的，$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ 是一个到 $R^n$ 的开子集上的同胚，满足下列条件

$$(3.1.1)\qquad M = \bigcup_{i \in I} U_i;$$

$$(3.1.2)\qquad \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

是 $R^n$ 的开子集间的 $C^{(k)}$ 映射，对所有 $i, j \in I$ 和 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. 显然由(3.1.2)可知 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 的逆 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 也是 $C^{(k)}$ 类的，因此 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵在每一点 $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ 都是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵. $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 叫做**相邻关系**或**局部坐标变换**.

我们称 $(U, \varphi)$ 为 $M$ 的一个**坐标卡**或**坐标邻域**.

如果 $P$ 是 $U$ 中的一点，那末 $\varphi(p)$ 是 $R^n$ 中的一点，所以 $\varphi(p)$ 是由 $n$ 个实数组成的数组. 命 $\varphi(p)$ 的第 $i$ 个坐标为 $x_i(p)$. 那末我们有 $\varphi(p)=(x_1(p),\cdots x_n(p))$. 由于 $\varphi$ 是连续的，每一 $x_i$ 是定义在 $U$ 上的实值连续函数. 而且由于 $\varphi$ 是 $1:1$ 的，如果对 $U$ 中的两点 $P,Q$ 有 $x_i(p)=x_i(Q)(i=1,\cdots,n)$，那末 $P=Q$. 也就是，$U$ 中的点 $P$ 是由实数组 $(x_1(p),\cdots,x_n(p))$ 决定的. $(x_1(p),\cdots,x_n(p))$ 称为 $U$ 中的点 $P$ 关于坐标邻域 $(U,\varphi)$ 的**局部坐标**，又 $U$ 上的函数组 $(x,\cdots,x_n)$ 称为 $(U,\varphi)$ 上的**局部坐标系**. 也就是我们有：

$U$ 中的点 $P$ 关于 $(U,\varphi)$ 的局部坐标等于 $\varphi(p)$ 在 $R^n$ 中的坐标.

我们用形容词“局部”来表明这个坐标仅仅定义在 $M$ 的部份 $U$ 上，只有当 $M$ 和 $R^n$ 的一个开集同胚时，局部坐标才定义在整个 $M$ 上.

我们称上述 $C^{(k)}$ 类坐标卡集 $\mathscr{A}$ 定义 Hausdorff 空间 $M$ 的一个 $C^{(k)}$ 类**构造**. 显然一个 $C^{(k)}$ 类坐标卡集也是一个 $C^{(l)}$ 类坐标卡集，对任何 $1\leqslant l\leqslant k$；因此一个 $C^{(k)}$ 类流形自然地是一个 $C^{(l)}$ 类流形，$1\leqslant l\leqslant k$. 一 $C^{(k)}$ 类流形 $M$（具有坐标卡集 $\mathscr{A}$）的任一开集 $D$，继承一由坐标卡集 $\mathscr{A}_D=\{(U_i\cap D,\varphi_{i|U_i\cap D}):i\in I\}$ 定义的 $C^{(k)}$ 类流形的构造.

我们称两个坐标卡 $(U,\varphi_U)$ 和 $(V,\varphi_V)$ 是 $C^{(k)}$ — **相容的**，如果 $U\cap V=\varnothing$，或者 $U\cap V\neq\varnothing$ 时坐标变换函数 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 和 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 都是 $C^{(k)}$ 的.

$\mathscr{A}$ 称为**极大的**，对于 $M$ 的任意一个坐标卡 $(W,\varphi_W)$，如果它与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都是 $C^{(k)}$ — 相容的，那么它自身必属于 $\mathscr{A}$.

为方便计，常假设微分流形的坐标卡集 $\mathscr{A}$ 是极大的，其中任意两个从坐标卡是 $C^{(k)}$ — 相容的.

若在 $M$ 上确定了一个 $C^{\infty}$ — 微分结构，则简称 $M$ 为**光滑流形**，若在 $M$ 上给定了一个 $C^{\omega}$ — 微分结构，则称 $M$ 为**解析流形**.

**例 1** $R^n$ 的每一个非空开集 $D$(包括 $R^n$ 自己)有一由坐标系 $(D,\varphi_D)$ 定义的 $n$ 维 $C^\infty$ 流形的自然结构,其中 $\varphi_D: D \to D$ 是恒同映射.

**例 2** 命 $S^1$ 为 $xy$ — 平面 $R^2$ 上的中心在原点半径为 1 的圆,给 $S^1$ 以 $R^2$ 的子空间的拓扑. 命

$$U_1 = \{P = (x,y) \in S^1 \mid y > 0\}$$

$$V_1 = \{P = (x,y) \in S^1 \mid y < 0\}$$

$$U_2 = \{P = (x,y) \in S^1 \mid x > 0\}$$

$$V_2 = \{P = (x,y) \in S^1 \mid x < 0\}$$

那末 $U_i$ 和 $V_i$ 是 $S^1$ 的开集,且 $U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2 = S^1$,命 $\psi_i, \varphi_i$ 为从 $U_i$ 和 $V_i$ 映到开区间 $I = \{t \mid -1 < t < 1\}$ 的映射,它们由 $\psi_1(x, y) = x, \varphi_1(x,y) = x, \psi_2(x,y) = y, \varphi_2(x,y) = y$ 给出,映射 $\psi_i$ 和 $\varphi_i$ 是同胚的. 因此 $S^1$ 是一 1 维拓扑流形,又 $\mathscr{A} = \{(U_i,\psi_i),(V_i,\varphi_i), i = 1,2\}$ 是一坐标卡集. 现在 $U_1 \cap U_2 = \{P = (x,y) \in S^1 \mid x,y > 0\}$,因此 $\psi_1(U_1 \cap U_2), \psi_2(U_1 \cap U_2)$ 都等于 $J = \{t \mid 0 < t < 1\}$. 对 $t \in J$,我们有 $f_{21}(t) = \psi_2(\psi_1^{-1}(t)) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $f_{12}(t) = \psi_1(\psi_2^{-1}(t)) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot f_{21}(t)$ 和 $f_{12}(t)$ 在 $0 < t < 1$ 是解析的,类似地,其它坐标变换也是解析的. 因此 $S^1$ 是一解析流形.

类似地可以证明

$$S^n = \{x \in R^{n+1} \mid (x_1)^2 + \cdots + (x_{n+1}{}^2 = 1\}$$

也是一解析流形.

**微分流形上定义的函数** 在 $C^{(k)}$ 类微分流形 $M$ 的一子集 $N$ 上定义的函数 $f$,即对每一点 $P \in N$,对应有一实数值 $f(p)$. 如 $N$ 是开集,在 $N$ 定义的函数 $f(p)$ 称为 $C^{(l)}$,$(l \leqslant k)$ 类函数,如果 $M$ 的坐标邻域 $U$ 与 $N$ 的交是非空的,它的点 $P$ 的坐标为 $(x_1,\cdots,x_n)$,则 $f(p) = f(\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_n)) = f_\circ\varphi^{-1}$ 是定义在欧氏空间 $R^n$ 的开集 $\varphi(U)$ 上的 $C^{(l)}$ 类函数,由 (3.1.2) 可知,$f$ 作为 $C^{(l)}$ 类函数是经局部坐标变换不变的.

**微分流形的映射** 两个 $C^{(k)}$ 流形之间的映射 $F: M_1 \to M_2$ 称为是 $C^{(l)}$，$1 \leqslant l \leqslant k$，类的，如果对任意两个坐标系，$M_1$ 的为 $(U, \varphi)$，$M_2$ 的为 $(V, \psi)$，映射 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 是 $C^{(l)}$ 类的. $F$ 是一 $(C^{(l)})$ **微分同胚**，如果 $F$ 是一同胚，又 $F$ 和 $F^{-1}$ 是 $C^{(l)}$ 类的；如果 $F$ 是一微分同胚，则 $M_1$ 和 $M_2$ 必须是同维数的.

### 3.1.2 切向量和切空间，函数的微分和余切空间

正则的曲线和曲面在其上的一点分别有切线和切平面的概念，同样，在微分流形上，在其上一点的附近可以用线性空间来"近似"，也就是在微分流形上的每一点可以引进切空间和余切空间等等概念.

**切向量** 设 $M$ 是一流形，$P$ 为 $M$ 上的一点. 我们考察定义在 $P$ 点的某一邻域上的所有实值 $C^\infty$ 函数全体，记为 $\mathscr{F}(p)$. 如果 $f, g \in \mathscr{F}(p)$，那末 $f+g$ 和 $f \cdot g$ 定义在 $f$ 定义的邻域和 $g$ 定义的邻域的交上；$\lambda f (\lambda \in R)$ 定义在 $f$ 定义的邻域上，如果对每一 $f \in \mathscr{F}(p)$ 都对应一实数 $v(f)$ 满足

(3.1.3) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu v(g)$

(3.1.4) $v(fg) = v(f) g(p) + f(p) v(g) \qquad (\lambda, \mu \in R; f, g \in \mathscr{F}(p))$

那末映射 $v: \mathscr{F}(p) \to R$ 称为 $M$ 在 P 的**切向量**. 要注意，对 $f \in \mathscr{F}(p)$，$v(f)$ 只依赖于 $f$ 的局部性质. 确切地说，我们可以证明

**定理 3.1.1** 如果 $f, g \in \mathscr{F}(p)$，又 $f$ 和 $g$ 在 p 的某一邻域 $U$ 上相等，那末 $v(f) = v(g)$.

为了证明这个定理，我们先证明下列三个引理：

**引理 3.1.1** 设 $S_1$ 和 $S_2$ 是 $R^n$ 中两个开的同心球，$\overline{S_1} \subset S_2$，则在 $R^n$ 上存在一个光滑的实函数 $f$，使得

1) $0 \leqslant f \leqslant 1$；

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in S_1,\\ 0, & x\bar{\in} S_2.\end{cases}$

**证明** 不妨设 $S_1$ 和 $S_2$ 都以原点为心，半径分别是 $a,b,0<a<b$；命

$$(3.1.5)\qquad g(t)=\begin{cases}\exp\dfrac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}, & t\in(a^2,b^2)\\ 0 & ,t\bar{\in}(a^2,b^2)\end{cases}$$

显然 $g$ 是 $R^1$ 的光滑函数，再命

$$(3.1.6)\qquad F(t)=\int_t^{+\infty}g(s)ds\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)ds,$$

则 $F$ 仍然是 $R^1$ 上的光滑涵数，并且 $0\leqslant F\leqslant 1$；$t\leqslant a^2$ 时，$F(t)=1$；当 $t\geqslant b^2$ 时，$F(t)=0$，命

$$(3.1.7)\quad f(x_1,\cdots,x_n)=F((x_1)^2+\cdots+(x_n)^2),$$

则 $f$ 适合引理的要求.□

**引理 3.1.2** 设 $U$ 与 $V$ 是 $R^n$ 中的两个非空开集，且 $\bar{V}$ 是紧致的，$\bar{V}\subset U$，则在 $R^n$ 上存在光滑的实函数 $f$，使得

1) $0\leqslant f\leqslant 1$,

2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\bar{\in} U.\end{cases}$

**证明** 由于 $\bar{V}$ 的紧致性，且 $\bar{V}\subset U$，所以存在有限多同心球 $\{S_k^{(1)},S_k^{(2)}\}_{1\leqslant k\leqslant r}$，使得

$$(3.1.8)\qquad \bar{S}_k^{(1)}\subset S_k^{(2)}\subset U,$$

并且 $\{S_k^{(1)}\}_{1\leqslant k\leqslant r}$ 构成 $\bar{V}$ 的开复盖. 由引理 3.1.1，对每一个 $k(1\leqslant k\leqslant r)$，存在光滑函数 $f_k:R^n\to R^1$，使得 $0\leqslant f_k\leqslant 1$，并且

$$(3.1.9)\qquad f_k(x)=\begin{cases}1,x\in S_k^{(1)},\\ 0,x\bar{\in} S_k^{(2)}.\end{cases}$$

命

$$(3.1.10)\qquad f = 1 - \prod_{k=1}^{r}(1 - f_k)$$

则容易验证 $f$ 适合引理的要求.□

**引理 3.1.3** 设 $(U,\varphi_U)$ 是光滑流形 $M$ 的任意一个坐标卡,$V$ 是 $M$ 的一个非空开集,使得 $\bar{V}$ 是紧致的,并且 $\bar{V}\subset U$,则在流形 $M$ 上存在光滑函数 $h:M\to R^1$,使得

1) $0\leqslant h\leqslant 1$;

2) $h(p)=\begin{cases}1, p\in V;\\ 0, p\bar{\in} U.\end{cases}$

**证明** 由于 $\bar{V}$ 是紧致的,并且 $\bar{V}\subset U$,利用 $M$ 的局部紧致性,不难构造开子集 $U_1$,使得

$$\bar{V}\subset U_1\subset \bar{U}_1\subset U.$$

设 $\dim M = n$,则 $\varphi_U(V)$ 和 $\varphi_U(U_1)$ 都是 $R^n$ 中的开集. 由引理 3.1.2,存在 $R^n$ 上的光滑函数 $f$,使得 $0\leqslant f\leqslant 1$,并且

$$(3.1.11)\qquad f(x)=\begin{cases}1, x\in \varphi_U(V),\\ 0, x\bar{\in}\ \varphi_U(U_1).\end{cases}$$

命

$$(3.1.12)\qquad h(p)=\begin{cases}f\circ\varphi_U(p), p\in V\\ 0 \qquad\qquad , p\bar{\in} U\end{cases}$$

则 $h$ 是 $M$ 上的光滑函数,并且适合引理的要求.□

**定理3.1.1的证明** 由(3.1.3),只要证明对任何在 $V$ 上等于 0 的 $f\in\mathscr{F}(p)$,都有 $v(f)=0$,为此,任取一点 $P\in V$,利用流形的局部紧致性,必有包含 $P$ 的开邻域 $W$,使得 $P\in W\subset\overline{W}\subset V$,由引理 3.1.3 可取一 $h\in\mathscr{F}(p)$,使得当 $p'\in W$ 时,$h(p')=1$,又当 $p'\bar{\in} V$ 时 $h(p')=0$,这时我们有 $f=h\cdot f$,且 $hf\equiv 0$. 应用(3.1.4),我们有 $v(f)=v(h\cdot f)=v(h)f(p')+h(p')v(f)=0$,即 $v(f)|_w=0$. 由于 $P$ 在 $V$ 中的任意性,所以 $v(f)$ 限制在 $V$ 上必为零.□

**切空间**　对 $M$ 在 $P$ 点的切向量 $v, w$ 和 $\lambda \in R$，我们定义和 $v+w$ 和数乘 $\lambda v$ 如下

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), (\lambda v)(f) = \lambda(v(f))$$
$$(f \in \mathscr{F}(p))$$

那末 $v+w$ 和 $\lambda v$ 仍然是 $M$ 在 $P$ 点的切向量. 因此，按这种方式定义 $P$ 点的切向量的和和数乘，则 $P$ 点的切向量全体就变为 $R$ 上的向量空间. 我们把这个向量空间记为 $T_p(M)$，并称为 $M$ 在点 $P$ 的**切向量空间**或**切空间**.

命 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $U$ 上的局部坐标系，又在 $U$ 中的一点 $P$ 命

(3.1.13) $$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

那末 $(\partial/\partial x_i)_p$ 是在 $P$ 点的一切向量.

**定理 3.1.2**　设 $M$ 是一 $n$ 维流形，那末切空间 $T_p(M)$ 也是 $n$ 维的，而 $\{(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p\}$ 是 $T_p(M)$ 的一个基.

**证明**　命 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $P$ 的一个邻域 $U$ 上的一个局部坐标系. 要证明 $T_p(M)$ 是 $n$ 维的，只要证明 $\{(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p\}$ 是 $T_p(M)$ 的一个基. 首先向量 $(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p$ 是线性独立的. 事实上，因为 $(\partial/\partial x_i)_p x_j = \delta_i^j$，我们有 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\partial/\partial x_i)_p x_j = \lambda_j$. 因此，如果 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\partial/\partial x_i)_p = 0$，那末我们有

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\partial/\partial x_i)_p x_j = 0(x_j) = 0,$$

而这表明 $(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p$ 是线性独立的. 其次，如果 $v \in T_p(M)$，我们证明 $v$ 可以写成

(3.1.14) $$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)(\partial/\partial x_i)_p$$

首先，如果 $\lambda$ 是一常数，则 $v(\lambda) = 0$，事实上，由于 $\lambda = \lambda \cdot 1$，由切向量的条件(3.1.3)，我们有 $v(\lambda) = \lambda v(1)$. 另一方面，由(3.1.4)我们有 $v(\lambda) = v(\lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot v(1)$. 因此我们有 $v(\lambda) = 0$，现在，如果 $f$ 是一个定义在点 $P$ 的一个邻域上的 $C^\infty$ 函数，则 $f$ 在 $P$ 的一个小邻

域上可以写成

$$f(Q) = F(x_1(Q),\cdots,x_n(Q))$$

在此 $F(u_1,\cdots,u_n)$ 是定义在$(x_1(p),\cdots,x_n(p))$的邻域上的一个 $C^\infty$ 函数,并在$(x_1(p),\cdots,x_n(p))$的某一邻域上可展开成

$$F(u_1,\cdots,u_n) = F(x_1(p),\cdots,x_n(p)) + \sum_{i=1}^{n} F_i(u_1,\cdots,u_n)(u_i - x_i(p)),$$

其中 $F_i(u_1,\cdots,u_n)(i = 1,\cdots,n)$ 是这个邻域中的 $C^\infty$ 函数,事实上

$$\begin{aligned} F(u_1,\cdots,u_n) &= F(x_1(p),\cdots,x_n(p)) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dF}{dt}(t(u_1 - x_1(p)) + x_1(p),\cdots,t(u_n - x_n(p)) \\ &\quad + x_n(p))dt \\ &= F(x_1(p),\cdots,x_n(p)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial s_i}\frac{ds_i}{dt}dt, \end{aligned}$$

其中我们命 $s_i = t(u_i - x_i(p)) + x_i(p)$ 因此只要命

$$F_i(u_1,\cdots,u_n) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial s_i}dt.$$

要注意 $F_i(x(p)) = \partial F(x(p))/\partial x_i = \partial f(p)/\partial x_i$. 将 $f$ 限制在 $P$ 的某一邻域,我们有

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1,\cdots,x_n)(x^i - x^i(p)).$$

现在作用 $v$ 到这个方程,利用(3.1.3),(3.1.4) 和 $v(\lambda) = 0$,我们得到

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x(p))u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v(x_i)$$

这表明 $v(f) = (\sum_{i=1}^{n} v(x_i)(\partial/\partial x_i)_p)(f)$ 对所有 $f \in \mathrm{F}(p)$ 都成立,这就证明了(3.1.14)式.

因此$\{(\partial/\partial x_1)_p,\cdots,(\partial/\partial x_n)_p\}$ 是 $T_p(M)$ 的一个基,所以 $T_p(M)$ 是一个 $n$ 维向量空间. □

对切向量 $v \in T_p(M)$,命 $\xi^i = v(x_i)$,并称 $n$ 维向量$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$为 $v$ 关于局部坐标系统$(x_1,\cdots,x_n)$的分量,我们有

(3.1.15) $$v=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

命$(x_1,\cdots,x_n)$和$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$为$P$点的两个局部坐标系统，那末$\{(\partial/\partial x_1)_p,\cdots,(\partial/\partial x_n)_p\}$和$\{(\partial/\partial\bar{x}_1)_p,\cdots,(\partial/\partial\bar{x}_n)_p\}$都是$T_p(M)$的基，并且有变换规律

(3.1.16)
$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\right)_p=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}_j}\right)_p.$$

$v\in T_p(M)$关于$(x_i)$，$(\bar{x}_i)$的分量$(\xi^i)$，$(\bar{\xi}^i)$分别满足变换规律

(3.1.17) $$\bar{\xi}^i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial x_j}\xi^j,\quad \xi^i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial\bar{x}_j}\bar{\xi}^j.$$

在经典的张量分析中，把满足变换规律(3.1.17)的向量$\xi^i$称为**逆变向量**.

**微分曲线**　命$(a,b)$为$R^1$上的一开区间，$R^1$是一1维流形而$(a,b)$是$R^1$的一个开子流形. 一个从$(a,b)$到流形$M$的微分映射$\varphi$称为$M$定义在$(a,b)$上的**微分曲线**. 注意，微分曲线是一映射$\varphi$，而不是区间$(a,b)$关于$\varphi$的像$\varphi((a,b))$.

现命$\varphi$为$M$上的一微分曲线，定义在开区间$(a,b)$上，并命$t_0\in(a,b)$，取$M$的一个局部坐标系$(x_1,\cdots,x_n)$，并命$((d\varphi_1/dt)_{t=t_0},\cdots,(d\varphi_n/dt)_{t=t_0})$为$\varphi$关于$(x_1,\cdots,x_n)$在$\varphi(t_0)$的切向量. 命

(3.1.18) $$v=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=t_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(t_0)}$$

则$v$是$M$在$\varphi(t_0)$的切向量，并且不依赖于局部坐标系$(x_1,\cdots,x_n)$的选择. 事实上，如果$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$是在$\varphi(t_0)$的另一局部坐标系，并且如果命$\bar{\varphi}_i(t_0)=\varphi^*\bar{x}_i(t_0)\stackrel{\triangle}{=\!=}\bar{x}_i(\varphi(t_0))$，那末

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=t_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(t_0)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\bar{\varphi}_i}{dt}\right)_{t=t_0}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\right)_{\varphi(t_0)}$$

我们称 $v$ 为**微分曲线 $\varphi$ 在 $\varphi(t_0)$ 的切向量**. 如果微分曲线 $\varphi$ 在每一点的切向量不为零，并且当 $t\neq t'$ 时 $\varphi(t)\neq\varphi(t')$，那末 $\varphi$ 称为**正则微分曲线**.

**函数的微分和余切空间**　命 $f$ 为定义在流形 $M$ 上的开集 $U$ 上的一个可微函数. 对 $P\in U$ 和对任意一 $v\in T_p(M)$，令

(3.1.19)　　$$(df)_p(v)=v(f).$$

那末 $(df)_p$ 是一从 $T_p(M)$ 到 $R$ 的一映射，对 $v,v'\in T_p(M)$ 和 $\lambda\in R$ 满足 $(df)_p(v+v')=(df)_p(v)+(df)_p(v')$ 和 $(df)_p(\lambda v)=\lambda(df)_p(v)$，也就是 $(df)_p$ 是向量空间 $T_p(M)$ 上的线性函数，因此是 $T_p(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)$ 的一个元素，线性函数 $(df)_p$ 称为 **$f$ 在点 $p$ 的微分**. $T_p^*(M)$ 称为**余切空间**.

如果 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $p$ 的一邻域上的局部坐标系，那末

(3.1.20)　　$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

特别地有

(3.1.21)　　$$(dx_j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\delta_i^j$$

因此 $\{(dx_1)_p,\cdots,(dx_n)_p\}$ 是 $T_p^*(M)$ 的一个基，它是 $T_p(M)$ 的基 $\{(\partial/\partial x_1)_p,\cdots,(\partial/x_n)_p\}$ 的对偶. 我们可将 $(df)_p$ 表为 $(dx_i)_p(i=1,\cdots,n)$ 的线性组合，并写成 $(df)_p=\sum_j\lambda_j(dx_j)_p$. 那末

$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\sum_j\lambda_j(dx_j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\sum_j\lambda_j\delta_i^j=\lambda_i,$$

因此 $\lambda_i$ 等于 $\partial f(p)/\partial x_i$，并且我们有

(3.1.22)　　$$(df)_p=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p.$$

### 3.1.3　子流形

在讨论子流形之前，我们先考察光滑流形之间的光滑映射所诱导的切映射.

**映射的微分**　设 $\varphi$ 为从流形 $M$ 到流形 $N$ 的一微分映射，如果

$f$是定义在$\varphi(p)(p \in M)$的一个邻域中的一可微函数，那末$\varphi^* f = f \circ \varphi$是定义在p的一个邻域中的一个可微函数，对$v \in T_p(M)$，命

$$((\varphi_*)_p v)(f) = v(\varphi^* f). \tag{3.1.23}$$

我们有

$$((\varphi_*)_p v))(f + g) = v(\varphi^* f + \varphi^* g) = v(\varphi^* f) + v(\varphi^* g)$$
$$= ((\varphi_*)_p v)f + ((\varphi_*)_p v)g,$$
$$((\varphi_*)_p v)(\lambda f) = \lambda((\varphi_*)_p v)(f).$$
$$((\varphi_*)_p v)(fg) = ((\varphi_*)_p v)f \cdot g(\varphi(p)) + f(\varphi(p)) \cdot ((\varphi_*)_p v)g,$$

因此$(\varphi_*)_p v$是$N$在点$\varphi(p)$的切向量，所以$(\varphi_*)p$是从$T_p(M)$到$T_{\varphi(p)}(N)$一个映射，并且容易知道这个映射是线性的. $(\varphi_*)_p$称为**映射$\varphi$在点$P$的微分**或由映射$\varphi$所诱导的**切映射**. 命$(x_1, \cdots, x_n)$和$(y_1, \cdots, y_n)$分别为在点$P$和$\varphi(P)$的局部坐标系，命

$$\varphi^* y_i = \varphi_i.$$

那么我们有

$$(\varphi_*)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)} \tag{3.1.24}$$

注意，如果$\varphi$是$M$的恒同映射，则$(\varphi_*)_p$是$T_p(M)$的恒同映射，如果$\varphi$是从$W$到$M$的可微映射，$\psi$是从$M$到$N$的可微映射，那末$\psi \circ \varphi$是一个从$W$到$N$的可微映射，并且

$$((\psi \circ \varphi)_*)_p = (\varphi_*)_{\varphi(p)} \circ (\varphi_*)_p, \quad P \in W$$

特别，如果$\varphi$是从$M$到$N$的微分同胚，那么$\varphi^{-1} \circ \varphi$和$\varphi \circ \varphi^{-1}$分别是$M$和$N$的恒同映射，因此$(\varphi_*)_p$是一个从$T_p(M)$到$T_{\varphi(p)}(N)$的1——1 线性映上(onto)映射，并且它的逆映射$(\varphi_*)_p^{-1}$和$((\varphi)_*^{-1})_{\varphi(p)}$一致，因此$T_p(M)$的维数等于$T_{\varphi(p)}(N)$的维数，因此，如果有一个从$M$到$N$的映上的微分映射，那末$M$和$N$有相同的维数.

**定义 3.1.2**(嵌入子流形)　设$M$和$N$是两个光滑流形，若有光滑映射$\varphi: M \to N$，使得

1)$\varphi$ 是单一的，

2) 在任一点 $P \in M$，切映射 $\varphi_*: T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$ 都是非退化的，则称 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的一个光滑子流形或称 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的**嵌入子流形**.

如果映射 $\varphi$ 只满足条件 2)，则称 $\varphi$ 是侵入，这时称 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的**浸入子流形**.

浸入是局部单一的，但不能保证在大范围是单一的，浸入子流形和嵌入子流形的区别在于象集 $\varphi(M)$ 是否有自交点.

**例 3.1.1　开子流形**

设 $U$ 是 $N$ 的一个开子集，将 $N$ 的光滑流形结构限制在 $U$ 上，便得到 $U$ 的一个光滑结构，成为与 $N$ 同维数的光滑流形，命 $\varphi = id: U \to N$ 是恒同映射，则 $(\varphi, U)$ 成为 $N$ 的一个嵌入子流形，称为 $N$ 的**开子流形**.

**例 3.1.2　闭子流形**

设 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的一个光滑子流形，如果

1)$\varphi(M)$ 是 $N$ 的一个闭子集；

2) 对每一点 $Q \in \varphi(M)$，存在一个局部坐标系 $(U; x_i)$，使得 $\varphi(M) \cap U$ 是由方程

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$$

定义的，其中 $m = \dim M$，$n = \dim N$，$(n > m)$ 则称 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的一个闭子流形.

例如，单位球面 $S^n \subset R^{n+1}$ 及恒同映射 $\varphi: S^n \to R^{n+1}$ 给出了 $R^{n+1}$ 的一个闭子流形.

**定义 3.1.3**(正则子流形)　设 $(\varphi, M)$ 是光滑流形 $N$ 的子流形，如果 $\varphi: M \to \varphi(M) \subset N$ 是同胚映射，则称 $(\varphi, M)$ 是 $N$ 的**正则子流形**，或称 $\varphi$ 是光滑流形 $M$ 在 $N$ 中的**正则嵌入**.

**定义 3.1.4**　命 $M$ 为一 $n$ 维的 $C^\infty$ 流形，$D \subset\subset M$ 为一开集，我们称 $D$ 在**点** $P \in \partial D$ **具有** $C^{(k)}$，$1 \leqslant k \leqslant \infty$，**可微边界** $\partial D$，如果存在

点 $P$ 的一个开邻域 $U$ 或一实值函数 $r \in C^{(k)}(U)$ 具有下列性质：

(3.1.25) $$U \cap D = \{x \in U : r(x) < 0\}$$

(3.1.26) $$dr(x) \neq 0, \text{当 } x \in U$$

$\partial D$ 称为是 $C^{(k)}$ 类的，如果在每一点 $P \in \partial D$ 是 $C^{(k)}$ 类的.

注意，(3.1.25) 和(3.1.26) 表明

(3.1.27) $U \cap \partial D = \{x \in U : r(x) = 0\}$ 和 $U - \bar{D} = \{x \in U : r(x) > 0\}$. 任何满足(3.1.25) 和(3.1.26) 的函数 $r \in C^{(k)}(U)$ 称为 $D$ **在点** $P$ **的(局部) 定义函数**. 如果 $U$ 是 $\partial D$ 的一个邻域，函数 $r \in C^{(K)}(U)$ 满足(3.1.25)(3.1.26). 则称为**全局定义函数**，或简称为 $D$ **的定义函数**.

$\partial D$ 带有 $n-1$ 维的 $C^{(k)}$ 类流形结构，定义如下，如果 $P \in \partial D$ 又 $r_p$ 是 $D$ 在 $P$ 附近的一个 $C^{(k)}$ 类定义函数，那末由反函数存在定理，存在一个从 $P$ 的开邻域 $U_p$ 到 $R^n$ 中 0 的开邻域 $V_p$ 的可逆 $C^{(k)}$ 映射 $\psi_p = (r_p, \psi'_p)$，其中 $\psi'_p : U_p \to R^{n-1}$ 是 $\psi_P$ 的最后 $n-1$ 个分量定义的，因此 $\varphi_P = \psi'_p|_{\partial D \cap U_p}$ 是 $\partial D \cap U_p$ 到 $R^{n-1}$ 的开集 $V_p \cap \{x : x_1 = 0\}$ 的同胚. 显然$\{(\partial D \cap U_p, \varphi_p), P \in \partial D\}$ 全体满足(3.1.1) 和(3.1.2). 又显然 $\partial D$ 是 $M$ 的闭子集，$\partial D$ 到 $M$ 的映射是一包含映射，即 $\iota : \partial D \to \iota(\partial D) \subset M$，它是一同胚映射，所以由定义 3.1.3，$\partial D$ 是 $M$ 的正则嵌入的闭子流形.

### 3.1.4 微分形式的代数

现在我们考虑余切空间 $T_p^* M$ 在 $R$ 上的 $r$ 次**外幂** $\wedge^r T_p^* M$，由定义 $\wedge^0 T_p^* M = R$，但当 $r \geq 1$ 时最方便的是将 $\wedge^r T_p^* M$ 和在 $T_p M$ 上的交错 $r$ — 多重线性形式，即 $R$ — 多重线性映射

$$\omega : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r\text{个因子}} \to R$$

等同起来，这个 $R$ — 多重线性映射对所有的 $v_1, \cdots, v_r \in T_p M$ 和$\{1, \cdots, r\}$ 的每一个置换 $\sigma$ 都满足

$$\omega(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)}) = \mathrm{sign}\sigma\omega(v_1,\cdots,v_r).$$

特别，

$$\omega(v_1,\cdots,v_r) = 0 \text{ 如果对 } i \neq j, v_i = v_j$$

上述恒同可以作为 $\wedge^r T^* M$ 的定义，由定义立知 $\wedge^1 T_p^* M = T_p^* M$，当 $r > \dim T_p M = \dim M$ 时，$\wedge^r T_p^* M = \{0\}$，$\wedge^r T_p^* M$ 的元素称在点 $P$ 的 $r-$ **余向量**或 $r-$ **形式**.

直和

$$\mathscr{G}_p(M) = \bigoplus_{r\geq 0} \wedge^r T_p^* M$$

称为 $T_p^* M$ 的**外代数**(或 Grassman **代数**). $r-$ 形式 $\omega$ 和 $S-$ 形式 $\eta$ 的**楔积**(或称**外积**)是一个$(r+s)$ 形式，记为 $\omega \wedge \eta$，它由

$$\omega \wedge \eta(V_1,\cdots,V_{r+s})$$

(3.1.28)

$$= \frac{1}{r!s!}\sum_\sigma \mathrm{sig}\sigma\omega(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})\eta(v_{\sigma(r+1)},\cdots,v_{\sigma(r+s)})$$

定义，其中和号是对$\{1,\cdots,r+s\}$ 的所有置换求和.

**定理 3.1.3** 楔积满足下列运算规律：$\omega,\omega_1,\omega_2 \in \wedge^r, \eta,\eta_1,\eta_2 \in \wedge^s, \zeta \in \wedge^t$，则有

1) 分配律$(\omega_1+\omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,

2) 反交换律 $\omega \wedge \eta = (-1)^{r\cdot s}\eta \wedge \omega$,

3) 结合律$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

**证明** 只要根据楔积和交错多重线性形式的定义就可证明. □

如果$(U,\varphi)$是$P \in M$近傍的一个坐标系统，$\varphi = (x_1,\cdots,x_n)$，并且如果 $1 \leqslant r \leqslant n$，那末

$$\{dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} : 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n\}$$

是 $\wedge^r T_p^* M$ 的一个基底，特别，$\dim \wedge^r T_p^* M = \binom{n}{r}$，且在 $P$ 的每一个 $r-$ 形式 $\omega_p$ 可唯一地表成

(3.1.29) $$\omega_p = \sum_J a_J (dx^J)_p, a_J \in R,$$

其中和号是对所有严格增加的 $r$ 一数组 $J=(j_1,\cdots,j_r)\subset(1,\cdots,n)$ 进行的，并且

(3.1.30) $dx^J=dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_r}$ 当 $J=(j_1,\cdots,j_r)$

注意

(3.1.30′) $$a_J=\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\right)$$

$\wedge^r T_p^* M$ 的基底 $\{dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_r}:1\leqslant j_1\cdots<j_r\leqslant n\}$ 和 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right)\right\}$ 有下面的关系

(3.1.31) $$dx_{j1}\wedge\cdots\wedge dx_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{ir}}\right)=\zeta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}$$
$$=\begin{cases}1,(j_1,\cdots,j_r)=(i_1,\cdots,i_r),\\0,(j_1,\cdots,j_r)\neq(i_1,\cdots,i_r).\end{cases}$$

迄今为止我们只考虑了在一固定点 $P\in M$ 的切向量和 $r$ 一形式，现在我们考察当点 $P$ 变动时的有关概念.

在 $M$ 上的一个**向量场**是一映射 $V:M\to U_{P\in M}T_pM$，对每一点 $P\in M$ 都相应有一切向量 $V_\in T_PM$，一坐标系 $(U,\varphi)$ 可定义 $U$ 上的 $n$ 向量场

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},$$

并且 $U$ 上的向量场 $V$ 有一表示 $V=\sum_{j=1}^n a_j(\partial/\partial x_j)$，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $U$ 上唯一决定的函数；$V$ 称为在 $U$ 上是 $C^{(l)}$ 类的，如果系数函数 $a_1,\cdots,a_n$ 在 $U$ 上是 $C^{(l)}$ 类的，如果 $0\leqslant l\leqslant k-1$，这个概念和坐标系的选择无关，但当 $l=k$ 时，就不是这样，因此，在一 $C^{(k)}$ 流形 $M$ 上我们只考虑 $C^{(l)}$ 类向量场，$l\leqslant k-1$，容易验证在 $M$ 的一开子集 $D$ 上，向量场 $V$ 是 $C^{(l)}$ 类的，当且仅当对每一 $f\in C^{l+1}(D)$，$V_f\in C^{(l)}(D)$，其中 $(V_f)(p)$ 由 $V_p(f)$ 被(3.1.18)定义.

类似的，$M$ 上的 $r$ 一形式 $\omega$ 由 $P\in M$ 的一映射 $P\to\omega_p$

$\in \wedge^r T_P^* M$ 给出. $\omega$ 是 $C^{(l)}$ 类的,$0 \leqslant l \leqslant k-1$,如果关于某一坐标系的局部表示 $\omega = \sum a_J dx^J$(见(3.1.29))中的所有系数 $a_J(P)$ 是 $C^{(l)}$ 类的函数;同样,$\omega$ 在 $M$ 上是 $C^{(l)}$ 类的,当且仅当对 $M$ 上的所有 $C^{(l)}$ 类向量场 $V_1, \cdots, V_r$, $\omega(V_1, \cdots, V_r) \in C^{(l)}(M)$.

我们将 $M$ 上的 $C^{(l)}$ 类 $r$ — 形式的空间记为 $C_r^{(l)}(M)$,$C_r^{(l)}(M)$ 的元素也称为 **$M$ 上的 $C^{(l)}$ 类 $r$ 次微分形式**. 特别,$C_0^{(l)}(M) = C^{(l)}(M)$,又 $C_r^{(l)}(M) = \{0\}$,如果 $r > \dim M$.

### 3.1.5 外微分

一个函数 $f \in C^{(1)}(M)$ 的微分 $df$ 定义 $M$ 上的一连续 1 — 形式;因此在每一 $C^{(k)}$ 流形 $M$ 上有一自然的线性映射 $d: C^{(1)}(M) \to C_1^{(0)}(M)$. 显然,对每一 $1 \leqslant l \leqslant k$ 有 $d(C^{(l)}(M)) \subset C_1^{l-1}(M)$,并且 $d$ 满足 Leibnitz 规则 $d(fg) = gdf + fdg$. 映射 $d$ 拓广到 $M$ 上 $C^{(1)}$ 类微分形式的全部 Grassmann 代数 $\mathscr{G}^1(M)$ 时,有

**定理 3.1.4** 命 $M$ 为一 $C^{(k)}$ 流形,$k \geqslant 2$, 并命 $\mathscr{G}^l(M) = \bigoplus_{r \geqslant 0} C_r^{(l)}(M)$, $0 \leqslant l < k$,唯一存在一线性映射 $d = d_M: \mathscr{G}^1(M) \to \mathscr{G}^0(M)$ 满足下列条件

1) $df$ 是 $f \in C^{(1)}(M)$ 的微分

2) 如果 $1 \leqslant l < k$ 和 $0 \leqslant r$,那末 $d\omega \in C_{r+1}^{(l-1)}(M)$ 当 $\omega \in C_r^{(l)}(M)$

3) 如果 $f \in C^{(l)}$, $2 \leqslant l \leqslant k$,那末 $d(df) = 0$

4) 如果 $\omega_1 \in C_r^{(1)}(M)$ 和 $\omega_2 \in C_s^{(1)}(M)$,

那末

$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$ 映射 $d$ 称为 $M$ 上的**外微分**.

在证明本定理之前,我们先指出,如果外微分算子 $d$ 是存在的,则 $d$ 是局部的算子,即我们可以证明

**定理 3.1.5** 外微分 $d$ 是一个局部算子,即如果在一开集 $U$ 上 $\omega_1 = \omega_2$,那么在 $U$ 上 $d\omega_1 = d\omega_2$

**证明** 证明和定理3.1.1的证明类似，由于$d$是线性的，所以只要证明如果$U$上$\omega \in C_r^{(1)}(M)$为0，那末在$U$上$d\omega = 0$，为此，任取一点$P \in U$，利用流形的紧致性，必有包含$P$的开邻域$W$，使得$P \in W \subset \overline{W} \subset U$，由引理3.1.3，在$M$上存在一光滑函数$h$，使得当$P' \in W$时，$h(p') = 1$，又当$P' \overline{\in} U$时，$h(p') = 0$，这时我们有$\omega = h \cdot \omega$，且$h\omega \equiv 0$，应用4)，我们有$d(h\omega) = dh \wedge \omega + hd\omega = 0$，即$d\omega|_w = 0$. 由于$P$在$U$中的任意性，所以$d\omega$限制在$U$上必为零. □

**定理3.1.4的证明** 由定理3.1.5，为了证明外微分$d$的唯一性，只要在局部坐标系统$(U,\varphi)$，$\varphi = (x_1,\cdots,x_n)$的局部坐标邻域$U$中来证明. 如果$\omega \in C_r^{(1)}(U)$那末$\omega = \sum_J a_J dx^J$（见(3.1.29)），其中$a_J \in C^{(1)}(U)$，对所有严格增加的$r$一数组$J$. 由3)，$d(dx_j) = 0$当$1 \leqslant j \leqslant n$；因此，由于$d$是线性的并重复应用4)就得到

$$d\omega = \sum_J da_J \wedge dx^J \tag{3.1.32}$$

这表明$d$完全由它在函数上的值决定，由此证明了唯一性.

由定理3.1.5和$d$的唯一性，要证明存在一映射$d$具有所要求的性质，只要在局部坐标系统$(U,\varphi)$内进行，由于$\omega \in C_r^{(1)}(U)$有唯一的表示$\omega = \sum_J a_J dx^J$，我们可以用(3.1.32)来定义$d\omega \in C_{r+1}^0(U)$，并且由线性性将$d$拓展到$\mathscr{G}^1(U)$，然后我们验证这样得到的映射$d = d_U : \mathscr{G}^1(U) \to \mathscr{G}^0(U)$满足1)——4).

在此只证明3)，因为它是最有趣的性质，其余的是不难验证的，如果$f \in C^{(2)}(U)$，由(3.1.22)可知$df = \sum_{j=1}^n (\partial f/\partial x_j)dx_j$. 因此，由(3.1.32)

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)dx_i\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right]dx^i \wedge dx^j \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

但是(3.1.33)右端的和中所有的系数都为0,由于$\partial/\partial x_i(\partial f/\partial x_j)$是由$C^{(2)}$类函数$f\circ\varphi^{-1}$关于$R^n$上的坐标$x_i$和$x_j$求二阶偏导数得到的,因此$d(df)=0$. □

在适当的可微性假设下,性质$d^2=d\circ d=0$可从函数拓广到任意的微分形式

**定理 3.1.6**(Poincaré 引理)　如果$2\leqslant l<k$,那末

$$d(d\omega)=0,\text{当 }\omega\in C_r^{(l)}(M).$$

**证明**　在一个局部坐标系$(U,\varphi)$中我们将$d\omega$表成(3.1.32)的形式,然后由定理 3.1.4 中的 4) 和 3) 即可得结论.

**例 3.1.3**　设$R^3$中的笛卡儿坐标系是$(x,y,z)$,$f$是$R^3$上的光滑函数,则

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

**例 3.1.4**　设$\omega=Adx+Bdy+Cdz$,其中$A,B,C$是$R^3$上的光滑函数,则

$$\begin{aligned}d\omega&=dA\wedge dx+dB\wedge dy+dC\wedge dz\\&=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\&\quad+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy.\end{aligned}$$

**例 3.1.5**　设$\omega=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$,则

$$d\omega=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

### 3.1.6　拉回

假设$M$和$N$是$C^{(k)}$流形,$f\in C^{(1)}(N)$,又$F:M\to N$是一$C^{(1)}$映射. **拉回**(pull back)$f\to F^*(f)=f\circ F$定义一代数同态$F^*:C^{(1)}(N)\to C^{(1)}(M)$. 我们现在考察$F^*$怎样拓广到微分形式去.

对$P\in M$,微分$dF_p:T_pM\to T_{F(p)}N$诱导转置(或对偶)映射

$F_p^*: T_{F(p)}^*N \to T_p^*M$，这映射拓广为由

(3.1.34) $(F_p^*\omega_{F(p)})(v_1,\cdots,v_r) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1),\cdots,dF_p(v_r))$

所定义的 Grassmann 代数的代数同态 $F_P^*$：$\mathscr{G}_{F(p)}(N) \to \mathscr{G}_p(M)$，其中 $r>0$，$\omega_{F(p)} \in \wedge^r(T_{F(p)}^*N)$，$v_1,\cdots,v_r \in T_pM$，如果 $\omega$ 是在开集 $U\subset N$ 上的一微分形式，那末由命 $(F^*\omega)_p = F_p^*(\omega_{f(p)})$（当 $P\in F^{-1}(U)$），我们得到一在 $F^{-1}(U)$ 上的微分形式，称为 $\omega$ **用 $F$ 的拉回**. 这样定义的映射 $F^*$ 有下列自然性质.

**定理 3.1.7** 假设 $M,N$ 和 $F: M\to N$ 是 $C^{(k)}$ 类的.

($i$) 拉回 $F^*$ 是一代数同态

$$F^*: \mathscr{G}^l(N) \to \mathscr{G}^l(M)$$

它满足 $F^*(C_r^{(l)}(N)) \subset C_r^{(l)}(M)$ 当 $0\leqslant l<k$ 和 $r\geqslant 0$.

($ii$) $F^*$ 和 $M,N$ 上的外微分 $d_M,d_N$ 可交换，即如果 $\omega$ 是 $C^{(l)}$ 类的，$1\leqslant l<k$（如果 $\omega$ 是 0 次的，则 $l=k$），那末

(3.1.35) $$d_M(F^*\omega) = F^*(d_N\omega).$$

**证明** 我们先对 $\omega=f\in C^{(l)}(N)$，$1\leqslant l\leqslant k$ 时证明(3.1.35). 由于 $F^*f = f\cdot F\in C^{(l)}(M)$，并且由于 $d_M$ 和 $d_N$ 作用在函数上时就是通常的微分，我们得到

$$d_M(F^*f) = d(f\circ F) = (df)\circ(dF) = F^*(df),$$

其中最后一个方程是当 $\omega_{F(p)} = df_{F(p)}$ 时由定义(3.1.34)得到的.

由 $F^*$ 的点态定义显然可知 $F^*$ 是关于微分形式的一个代数同态，为了证明($i$)和($ii$)的其余情形，只要对 $\omega\in C_r^{(l)}(N)$ 的局部情形进行证明，因此我们可以假设 $\omega$ 在 $U\subset N$ 上的表达式是 $\omega = \sum a^J dx_J$，其中 $a_J\in C^{(l)}(N)$，那末

(3.1.36)
$$F^*\omega = \sum_{J=(j_1,\cdots,j_r)} F^*(a_j)F^*(dx_{j_1})\cdots F^*(dx_{j_r}) = \sum (a_j\circ F)d(x_{j_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(x_{j_r}\circ F)$$

其中我们引用了(3.1.35)当 $r=0$ 时的情形；这表示 $F^*\omega\in$

$C_r^{(l)}(F^{-1}(U))$，再者(3.1.36)表示

$$d_M(F^*\omega)\sum d(a_J\circ F)\wedge d(x_{j_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(x_{j_r}\circ F)$$

$$=\sum F^*(da_J)\wedge F^*(dx_{j_1})\wedge\cdots\wedge F^*(dx_{j_r})$$

$$=F^*(\sum da_J\wedge dx^J)=F^*(d_N\omega).\square$$

我们还可证明如果$G:W\to M,F:M\to N$都是$C^{(k)}$类的映射，那末$F\circ G:W\to N$满足

(3.1.37) $$(F\circ G)^*=G^*\circ F^*$$

### 3.1.7 单位分解定理

**定义 3.1.5** 拓扑空间$M$的一组集合$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$称为局部有限，若对任一点$P\in M$，必有一邻域$U$，使得$U$最多与有限个$U_\alpha$相交.

**定义 3.1.6** (仿紧空间)$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$称为拓扑空间$M$的复盖，如果$M=\sum_{\alpha\in I}U_\alpha$. 复盖$\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$称为复盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$的加细，如对任一$\beta\in J$，必有$\alpha\in I$，使$V_\beta\subset U_\alpha$，Hausdorff 空间称为**仿紧**(Paracompact)的，如果对$M$的任一开盖必有一个局部有限的加细开复盖.

**引理 3.1.4** 若$M$是局部紧并有可数基的 Hausdorff 空间，则$M$是仿紧的一此外，对$M$中的任一局部有限开复盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，必有$M$的一个开复盖$\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$，使得$\bar{V}_\alpha\subset U_\alpha$

证明可以在点集拓扑的书中找到.

**定理 3.1.8** (单位分解定理)设$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$是光滑流形$M$的一个开复盖，则在$M$上存在一族光滑函数$\{\chi_\alpha\}$，满足下列条件：

*i*) 对每一个$\alpha$，$0\leqslant\chi_\alpha\leqslant1$，支集$\sup_p\chi_\alpha$是紧致的，并且$\sup_p\chi_\alpha\subset U_\alpha$；

*ii*) $\{\sup_p\chi_\alpha\}$是局部有限的；

*iii*) $\sum_{\alpha\in I}\chi_\alpha(p)=1$，对任意$p\in M$.

由条件*ii*)，在任意一点$p\in M$，条件*iii*)左边只有有限多项不

为零，故和式是有意义的，函数族$\{\chi_\alpha\}$称为**从属于开复盖$\mathscr{U}$的单位分解**.

**证明** 因为$M$是流形，所以$M$是局部紧并有可数基的Hausdorff空间，因此由引理3.1.4，$M$是仿紧的，即对$M$的任一开复盖必有一个局部有限的加细开复盖，不妨假定流形$M$的开复盖$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$就是$M$的局部有限开复盖，而且就是$M$的坐标复盖，同样由引理3.1.4还存在$M$的一个开复盖$\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$，使得$\bar{V}_\alpha\subset U_\alpha$.

根据引理3.1.3，在$M$上存在光滑函数$h_\alpha$，$0\leqslant h_\alpha\leqslant 1$，并且

$$h_\alpha(p)=\begin{cases}1, p\in V_\alpha,\\ 0, p\bar{\in} U_\alpha.\end{cases}\tag{3.1.38}$$

显然$\operatorname{supp}h_\alpha\subset\bar{U}_\alpha$，对任意一点$P\in M$都有一个邻域$U$，使$\bar{U}$是紧致的；由于$\mathscr{U}$是局部有限的，$\bar{U}$只与$\mathscr{U}$中有限多个成员相交，和式$\sum\limits_{\alpha\in I}h_\alpha(p)$中只有有限多项不是零，所以$h=\sum\limits_{\alpha\in I}h_\alpha$是定义在$M$上的光滑函数，因为$\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$是$M$的复盖，所以点$P$必落在某个$V_\alpha$内，故$h(p)\geqslant 1$. 命

$$\chi_\alpha=h_\alpha/h,\tag{3.1.39}$$

则$\chi_\alpha$是$M$上的光滑函数，不难验证，函数族$\{\chi_\alpha\}$满足定理的条件.
□

### 3.1.8 流形的定向

**定义 3.1.7** 一$n$维的$C^{(k)}$流形$M$称为**可定向的**，如果在$M$上存在一无处为零的连续$n$－形式$\omega$(即对所有$P\in M$，$\omega_p\neq 0$) 两个这样的形式$\omega_1$，$\omega_2$称为定义$M$的相同定向，如果$\omega_1=f\omega_2$，其中$f$是$M$上的正连续函数，当流形选择了一定向(由指定的无处为零的$n$－形式$\omega$给出)，则称流形**已定向**

由于$\wedge^n(T_p^*M)$是一维的，显然任何两个无处为零的连续$n$－形式$\omega_1$和$\omega_2$，在$M$上只差一非零的连续函数. 因此如果$M$是连通

的，那末在 $M$ 上只有两个定向：如果其中一个是由 $\omega$ 定义的，那末另一个就是由 $-\omega$ 定义的.

如果$M$是由$\omega$定向，那末坐标系统$(U,\varphi)$，其中$\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$和$T_p^*M$的相应的基$\{dx_1,\cdots,dx_n\}$称为**正定向的**(或简称正的)如果$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$在$U$上定义和$\omega$相同的定向，也就是如果$\omega_p=a(p)(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)_p$，其中$a(p)>0$对所有的$p\in U$.这时称$(U,\varphi)$是与$M$**的定向相符的坐标系**.显然在定向流形上可取定向相符的坐标复盖.

**定理 3.1.9** 流形$M$可定向的充要条件是能找到一个$M$的坐标卡$\mathscr{U}$，使得$\mathscr{U}$中的任意两坐标系统$(U,\varphi)$，$(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$当$U\cap\widetilde{U}\neq\varnothing$时，局部坐标变换$\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}$的函数行列式$det\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\varphi}>0$在$P\in U\cap\widetilde{U}$.

**证明** 我们不妨假定$M$是连通的，设$M$有一无处为零的连续$n-$形式$\omega$，$\mathscr{U}$是$M$的一个坐标卡，$(U,\varphi)\in\mathscr{U}$，在$U$中取$n-$形式

$$\omega_U=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

则当$\omega$限制在$U$中时可写为$\omega=a_U\omega_U$，其中$a_U$为$U$上的连续函数，不妨假定$a_U>0$，如不然，只要把坐标系$(x_1,\cdots,x_n)$换成$(-x_1,\cdots,x_n)$就行，这时在$U\cap\widetilde{U}$上有

$$\omega|_{U\cap\widetilde{U}}=a_U\omega_U=a_{\widetilde{U}}\omega_{\widetilde{U}}.$$

因此$\omega_{\widetilde{U}}=\dfrac{a_u}{a_{\widetilde{U}}}\omega_U$，但是$\omega_{\widetilde{U}}=\det\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\varphi}\omega_U$，因此$\det\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\varphi}=\dfrac{a_U}{a_{\widetilde{U}}}>0$.

反之，若$M$的坐标卡适合定理的条件，由引理3.1.4，$M$是仿紧的，我们可以取一局部有限开复盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，其中每一$U_\alpha$包含于某一个$\mathscr{U}$的坐标邻域之中，并且$\overline{U}_\alpha$是紧的，由单位分解定理3.1.8，有从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in I}$.由于$U_\alpha$是坐标邻域，其坐标系设为$\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$，在$U_\alpha$定义

$$\omega_\alpha=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

并在 $M$ 上定义 $n-$ 形式 $\omega=\sum_{\alpha\in I}\chi_\alpha\omega_\alpha$，$\omega$ 是可微分的，对任意一点 $P\in M$，至多属于有限个 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_l}$，设 $U_{\alpha_j}\cap U_{\alpha_k}$ 中的坐标变换为 $\varphi_{\alpha_j}\circ\varphi_{\alpha_k}^{-1}$，则有

$$\omega=\sum_{j=1}^{l}\chi_{\alpha_j}\omega_{\alpha_j}=\sum_{j=1}^{l}(\chi_{\alpha_j}\det\frac{\partial\varphi_{\alpha_j}}{\partial\varphi_{\alpha_k}})\omega_{\alpha_k},$$

于是在 $P$ 点. $\sum_{j=1}^{l}\chi_{\alpha_j}\det\frac{\partial\varphi_{\alpha_j}}{\partial\varphi_{\alpha_k}}>0$，此即 $\omega$ 无处为零，故 $M$ 是可定向的，定理证明. □

**定理 3.1.10** 设 $D\subset M$ 是流形 $M$ 上的带边区域，具有 $C^{(k)}$ 边界 $\partial D$，如果 $M$ 是可定向的，则 $D$ 的边界 $\partial D$ 也是可定向的.

**证明** 命 $P\in\partial D$ 并设 $r$ 是 $p$ 的某一邻域 $U$ 上的 $C^{(k)}$ 类定义函数，因此 $U\cap D=\{q\in U:r(q)<0\}$. 在收缩 $U$ 后，我们可以假设在 $U$ 上有一正定向的坐标系 $\varphi$，其中 $\varphi=(r,x_2,\cdots,x_n)$. 那末 $(x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\partial D$ 在点 $P$ 的局部坐标系，以 $(n-1)-$ 式

(3.1.40) $$dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

给出边界 $\partial D$ 在点 $P$ 的坐标邻域 $U\cap\partial D$ 上的定向.（确切地说，我们考虑拉回 $l^*(dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n)$，其中 $l:\partial D\cap U\to U$ 是包含映射，我们可以证明，这样给出的坐标邻域的定向是彼此相容的，设 $(V,\psi)$，$\psi=(y_1,\cdots,y_n)$，是边界点 $P$ 的另一个与 $M$ 的定向相符的坐标系，则

(3.1.41) $$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}>0.$$

若设 $y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n)$，则对于任意固定的 $x_2,\cdots,x_n$，变量 $y_1$ 的符号与 $x_1$ 相同，并且当 $x_1=0$ 时，$y_1=0$，所以在 $P$ 点，$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}>0$，不失普遍性，可设 $y_1=x_1$，则(3.1.41) 式成为

(3.1.42) $$\frac{\partial(y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_2,\cdots,x_n)}>0$$

这说明 $dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$ 和 $dy_2\wedge\cdots\wedge dy_n$ 在 $U\cap V\cap\partial D$ 上给出的定向是一致的，因此 $\partial D$ 是可定的. □

边界 $\partial D$ 由(3.1.40)式给出的定向称为 $D$ **在** $\partial D$ **上诱导的正定向**. 流形 $\partial D$ 的相反定向记为 $-\partial D$.

### 3.1.9 外微分式的积分

1. $R^n$ **上的积分** 为了定义可定向流形上的积分,我们先考虑 $R^n$ 的情形,假设 $U \subset R^n$ 和 $\eta \in C_n^{(0)}(U)$ ($C_r^{(l)}(M)$ 表示 $M$ 上 $C^{(l)}$ 类的 $r-$ 形式) 在 $U$ 上具紧支集,存在唯一一个 $U$ 上的连续函数 $f$ 使得 $\eta = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. 我们定义

(3.1.43) $$\int_U \eta = \int_U f dx_1 \cdots dx_n.$$

其中右端的积分是 $R^n$ 中通常的 Riemann 重积分,如果 $W \subset R^n$ 是开的并且 $F: W \to F(W) = U$ 是 $-C^{(1)}$ 微分同胚,则重积分的变量替换公式为

(3.1.44) $$\int_{F(W)} f(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_W f(F(t)) \left| det(dF)_t \right| dt_1 \cdots dt_n.$$

如果 $F$ 是保持定向的,则

$$\det(dF) = det \frac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(t_1, \cdots, t_n)} > 0,$$

因此(3.1.44)右端的积分等于

$$\int_W (f \circ F) \det(dF)_t dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n = \int_W (f \circ F) dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_n$$

$$= \int_W F^* (f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

因此,当 $F: W \to F(W)$ 保持定向时

(3.1.45) $$\int_{F(W)} \eta = \int_W F^* \eta.$$

2. **可定向** $n-$ **维流形** $M$ **上的积分** 现在我们利用变换公式(3.1.45)来定义可定向 $n-$ 维流形 $M$ 上的 $n-$ 形式的积分,假设 $(U, \varphi)$, $\varphi = (x_1, \cdots, x_n)$ 是一正坐标系,如果 $\omega \in C_n^{(0)}(U)$ 在 $U$ 具有紧支集,我们定义

(3.1.46) $$\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

其中右端的积分（在 $R^n$ 中）如(3.1.43) 所定义，如果$(U,\psi)$，$\psi=(y_1,\cdots,y_n)$是$U$上的另一正坐标系，映射$F=\psi\circ\psi^{-1}:\psi(U)\to\varphi(U)$保持定向，因此，由(3.1.45) 和(3.1.37) 我们有

$$\int_{\varphi(U)}(\varphi^{-1})^*\omega=\int_{\psi(U)}F^*(\varphi^{-1})^*\omega$$
$$=\int_{\psi(U)}(\varphi^{-1}\circ F)^*\omega=\int_{\psi(U)}(\psi^{-1})^*\omega.$$

因此定义(3.1.46) 不依赖于(正) 坐标系 $\varphi$.

现在容易在定向流形 $M$ 上进行整体积分. 选择 $M$ 上的一可数坐标卡$\{(U_i,\varphi_i)\}$使得 $\varphi_i$ 是正定向的.（注意对任意的 $\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$，$\varphi$ 或者 $\tilde{\varphi}=(-x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正的！）命$\{\chi_i\}$为从属于局部有限开复盖 $\mathscr{U}=\{U\}$ 的一连续单位分解使得 $\chi_i$ 在 $U_i$ 具紧支集，对具紧支集的 $\omega\in C_n^{(0)}(M)$ 我们定义

$$\int_M\omega=\sum_i\int_{U_i}\chi_i\omega_i. \tag{3.1.47}$$

下面分别证明上述定义和正定向坐标卡和单位分解的选择无关.

1)(**3.1.47) 式右端与 $U_i$ 的选择无关**

**证明** 不妨设 $Supp(\chi_i\cdot\omega_i)$ 同时包含在坐标邻域 $U_\alpha$ 和 $U_\beta$ 内，设它们的定向相符的局部坐标分别是 $\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\psi=(y_1,\cdots,y_n)$，则坐标变换的 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}>0. \tag{3.1.48}$$

假定 $\chi_i\cdot\omega_i$ 在 $U_\alpha$ 和 $U_\beta$ 内的表达式分别是

$$\chi_i\cdot\omega_i=fdx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \tag{3.1.49}$$
$$=gdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n,$$

且 $\mathrm{supp}f=\mathrm{supp}g=\mathrm{supp}(\chi_i\cdot\omega_i)\subset U_\alpha\cap U_\beta$. 则

$$f\circ\varphi^{-1}=g\circ\psi^{-1}J=g\circ\psi^{-1}\cdot|J|. \tag{3.1.50}$$

根据 Riemann 积分的变量替换公式，我们有

$$\int_{U_\alpha\cap U_\beta}\chi_i\omega_i=\int_{\psi(U_\alpha\cap U_\beta)}(\psi^{-1})^*\chi_i\omega_i$$

$$= \int_{\psi(U_\alpha \cap U_\beta)} g \circ \psi^{-1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

$$= \int_{\psi(U_\alpha \cap U_\beta)} g \circ \psi^{-1} \cdot |J| \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= \int_{\varphi(U_\alpha \cap U_\beta)} f \circ \varphi^{-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

即

(3.1.52) $$\int_{U_\alpha} \chi_i \omega_i = \int_{U\beta} \chi_i \omega_i. \square$$

2)(3.1.47)式右端与单位分解$\{\chi_i\}$的选取无关

**证明** 假设另有一从属于局部有限开复盖 $\mathscr{V} = \{v\}$ 的单位分解$\{\eta_i\}$，这里$\bar{V}$是紧的，而且包含于一坐标邻域中，则$\{\chi_i\eta_i\}$是从属于$\{U \cap V\}$的单位分解，由于$\operatorname{supp}\omega_i$是紧的，故$\mathscr{U}$中至多有有限多个开集与其相交，对$\mathscr{V}$亦然，因此

$$\sum_{i,j} \int_{\varphi(U_i \cap V_j)} (\varphi^{-1})^* \chi_i \eta_i \omega_i$$

$$= \sum_{i,j} \int_{U_i \cap V_j} \chi_i \eta_i \omega_i$$

$$= \sum_i \int \chi_i (\sum_j \eta_j) \omega_i$$

$$= \sum_i \int_{Ui} \chi_i \omega_i.$$

同理可证

$$\sum_{i,j} \int_{\varphi(U_i \cap V_j)} (\varphi^{-1})^* \chi_i \eta_i \omega_i = \sum_j \int_{Vj} \eta_j \omega_i. \square$$

在我们对具支集的连续形式定义了积分$\int_M \omega$后，就可以象在$R^n$中一样将积分拓广到更一般的$n$－形式去.

**3. 子流形上的积分** 若$\omega$是$r < n$次连续外微分式，且有紧致支集$supp\omega$，则可定义$\omega$在$M$的$r$维子流形上的积分，设

(3.1.53) $F : N \to M$

是$M$的$r$维嵌入子流形，则$F^*\omega$是$r$维光滑流形$N$上的$r$次连续

外微分式，且有紧支集，故积分$\int_N F^* \omega$是有定义的，我们把 $\omega$ 在子流形 $F(N)$ 上的积分定义为

(3.1.54) $$\int_{F(N)} \omega = \int_N F^* \omega.$$

**3.1.10 Stokes 公式**

在 $R^n$ 中的许多基本的和重要的积分公式，都显示了一个区域上的积分和它的边界上的积分之间的联系.

**例 1** (Newton — Leibniz 公式) 设 $D = [a,b]$ 是 $R^1$ 中的一个闭区间，$f$ 是 $D$ 上的连续可微函数，则有微积分学的基本公式

(3.1.55) $$\int_D df = f(b) - f(a).$$

如用 $\partial D$ 记 $D$ 的有向边界 $\{b\} - \{a\}$，则上式可写成

(3.1.56) $$\int_D df = \int_{\partial D} f$$

**例 2** (Green 公式) 设 $D$ 是 $R^2$ 中一个有界区域，其定向与 $R^2$ 的一致，用 $\partial D$ 记 $D$ 的有向边界，其定向由 $D$ 所诱导，即 $\partial D$ 的正向与指向 $D$ 内部的法向量构成与 $R^2$ 的定向一致的标架，设 $P$、$Q$ 是 $D$ 上的连续可微函数，则有 Green 公式

(3.1.57) $$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}) dxdy$$

如命 $\omega = pdx + Qdy$，则

$$d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}) dx \wedge dy$$

这时(3.1.57) 可写成

(3.1.58) $$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

**例 3** (Gauss 公式) 设 $D$ 是 $R^3$ 中的有界区域，其定向与 $R^3$ 一致，以外法线方向为正向诱导出边界 $\partial D$ 的定向，设 $P,Q,R$ 分别是 $D$ 上的连续可微函数，则有 Gauss 公式

(3.1.59) $$\int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

使 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$,则上式也可写成

(3.1.60) $$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

**例 4** (Stokes 公式) 设 $S$ 是 $R^3$ 中一块有向曲面,边界 $\partial S$ 是有向闭曲线,而且 $\partial S$ 的正向与 $S$ 的正向法向量符合右手法则(假定 $R^3$ 以右手系为正定向). 设 $P,Q,R$ 是在包含 $S$ 在内的一个区域上的连续可微的函数,则有 Stokes 公式

(3.1.61) $$\int_{\partial s} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_s \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

如命 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$,则上式也可写成

(3.1.62) $$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

从以上的例子看出,如果采用外微分的记号和运算,那末通常数学分析中的几个基本积分公式都有统一的形式. 下面我们将这个统一的形式的积分公式拓广到微分流形上去,这就是著名的 Stokes 公式,它在多元复分析中是一个十分重要的公式,特别是在多复变函数的积分表示理论中经常要用到它.

**定理 3.1.11** (Stokes 公式) 命 $M$ 为一 $n$ 维定向 $C^{(r)}$ 流形, $k \geqslant 2$, $D \subset\subset M$ 为一开集具有的 $C^{(1)}$ 类边界 $\partial D$. 如果 $\omega \in C^{(1)}_{n-1}(\overline{D})$,那末

(3.1.63) $$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

**说明** $i)$ 关于 $\omega$ 的假设表示 $\omega$ 是定义在 $\overline{D}$ 上,且 $\omega$ 的系数关于任何坐标系统 $(U,Q)$ 都是 $C^{(1)}(U \cap \varphi)$ 的,即他们在 $U \cup D$ 上有偏导数并可连续开拓到 $U \cap \overline{D}$. $ii)$ $\partial D$ 的定向是由 $D$ 诱导的(见定理 3.1.10). $iii)$ (3.1.63) 式左端的积分,确切地说是 $\int_{\partial D} \iota^* \omega$,其中 $\iota: \partial D \to M$ 是包含映射.

**证明** 由 $\bar{D}$ 的紧致性，存在有限多个正定向坐标系统 $(U_i, \varphi_i)$，$1\leqslant i\leqslant l$，使得 $\bar{D}\subset\bigcup_{i=1}^{l}U_i$，且如果对某些 $i$，$U_i\cap\partial D\neq\varnothing$，那末 $\varphi_i=(r,\varphi'_i)$，其中 $\varphi'_i: U_i\to R^{n-1}$，又 $D\cap U_i\subset\{P\in U_i: -1<r(P)<0\}$，命 $\chi_i$ 是 $C^{(k)}$ 类的，在 $U_i$ 中有紧支集，使得在 $\bar{D}$ 上 $\sum_{i=1}^{l}\chi_i=1$. 由线性性，如果我们能证明

$$\int_{\partial D\cap U_i}\chi_i\omega=\int_{D\cap U_i}d_{(\chi_i\omega)}\quad i=1,\cdots,l, \tag{3.1.64}$$

那末立得公式(3.1.63).

**情形1**： $U_i\cap\partial D\neq\varnothing$. 省掉下标 $i$. 如果 $\varphi=(r,\varphi')$，那末 $\widetilde{\varphi}=\varphi'|_{\partial D\cap U}$ 是 $\partial D$ 在 $\partial D\cap U$ 上的一个正定向坐标系、我们使 $(\varphi^{-1})^*(\chi\omega)=\sum_{j=1}^{n}g_jdt_1\wedge\cdots\wedge[dt_j]\wedge\cdots\wedge dt_n$(注意符号 $[dt_j]$ 表示缺掉微分 $dt_j$)，其中系数 $g_j\in C^{(1)}$，并在 $\varphi(U\cap\bar{D})$ 中有紧支集；那末

$$(\widetilde{\varphi}^{-1})^*\iota^*(x\omega)=g_1(0,t_2,\cdots,t_n)dt_2\wedge\cdots\wedge dt_n.$$

由(3.1.35)

$$(\varphi^{-1})^*d(\chi\omega)=d[(\varphi^{-1})^*\chi\omega]\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial g_j}{\partial t_j}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n.$$

由于 $\varphi(D\cap U)\subset\{t\in R^n: -1<t_1<0\}$，由(3.1.46)，(3.1.43)和 $g_1,\cdots g_n$ 的支集条件可知

$$\int_{D\cap U}d(\chi\omega)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\int_{\{t\in R^n;-1<t_1<0\}}\frac{\partial g_j}{\partial t_j}dt_1\cdots dt_n. \tag{3.1.65}$$

由微积分基本定理

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{\partial g_1}{\partial t_1}dt_1&=g_1(0,t_2,\cdots,t_n)-g_1(-1,t_2,\cdots,t_n)\\&=g_1(0,t_2,\cdots,t_n),\end{aligned} \tag{3.1.66}$$

且

$$\int_R\frac{\partial g_1}{\partial t_j}dt_j=0\qquad 当\ j\geqslant 2, \tag{3.1.67}$$

由于当 $j\geqslant 2$ 时，$g_j$ 关于 $t_j$ 有紧支集，因此

$$\int_{D\cap U}d(\chi\omega)=\int_{R^{n-1}}g_1(0,t_2,\cdots t_n)dt_2\cdots dt_n$$

$$= \int_{\varphi(\partial D\cap U)} (\widetilde{\varphi^{-1}})^* \iota^*(\chi\omega)$$
$$= \int_{\partial D\cap U} \iota^*(\chi\omega).$$

**情形 2：** $U_i \cap \partial D = \varnothing$. 我们可假设 $U_i \subset D$. 由此 $\int_{\partial D\cap U_i} \chi_i\omega = 0$，所以如果 $\int_{U_i} d(\chi_i\omega) = 0$，那末(3.1.64)成立. 这可以从情形 1 的计算中将(3.1.65)式右端的积分域代以 $R^n$ 和利用这时(3.1.67)对 $j = 1$ 也成立这个事实知道. □

当 $M$ 是紧的时，我们可以在定理 3.1.11 中取 $D = M$，这时 $\partial D = \varnothing$. 由此我们得到：

**推论 3.1.1** 命 $M$ 为一 $n$ 维的 $C^{(k)}$ 类紧流形. 如果 $\omega \in C_{n-1}^{(1)}(M)$，那末

$$\int_M d\omega = 0.$$

**逐块 $C^{(1)}$ 边界的情形** Stokes 定理容易拓广到具有**逐块 $C^{(1)}$ 边界**的区域 $D \subset\subset M$，它可如下定义：存在 $\partial D$ 的有限复盖 $\{U_1, \cdots, U_l\}$ 和函数 $r_i \in C^{(1)}(U_i)$ 使得

(3.1.68) $\quad D \cap (\bigcup_{i=1}^{l} U_i) = \{x \in \bigcup_{i=1}^{l} U_i : r_i(x) < 0,\quad$ 对所有的 $i$ 和 $x \in U_i\}$，

又对 $\{1, \cdots, l\}$ 的任何子集 $\{i_1, \cdots, i_r\}$ 我们有

(3.1.69) $\quad dr_{i_1} \wedge \cdots \wedge dr_{i_r} \neq 0$ 在 $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_\gamma}$ 上集合 $\{r_i \in C^{(1)}(U_i) : i = 1, \cdots, l\}$ 称为 $D$ 的**标架**. 注意(3.1.69)表示当 $\gamma > \dim M$ 时 $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_\gamma} = \varnothing$. 而且，每一集合 $\sum_i = \{x \in U_i : r_i(x) = 0\}$ 是 $U_i$ 的一个 $C^{(1)}$ 类子流形，条件(3.1.69)常称为流形 $\sum_i$. $1 \leqslant i \leqslant l$，是横截交刈的(intersect transversally)，或者说是处于一般位置(general position). 如果 $S_i = \partial D \cap \sum_i$，那么 $\partial D = \bigcup_{i=1}^{l} S_i$. $S_i$ 在 $\sum_i$ 中的内部 $\overset{0}{S}_i$ 是一 $C^{(1)}$ 类流形，它具有由 $D$ 诱导的定向.（读者可

以证明 $\overset{0}{S}_i$ 本身是 $\sum_i$ 的一开子集具有 $C^{(1)}$ 光滑边界). 对 $\omega \in C^{(1)}_{n-1}(\overline{D})$ 我们定义

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_{i=1}^{l} \int_{\overset{\cdot}{S}_i} \omega$$

只要将定理 3.1.11 的证明适当修改,就可以证明 Stokes 定理仍然成立,也就是

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

### 3.1.11 链、同调群

流形 $M$ 上的逐块光滑曲面可以剖分为连续单形. **微分流形 $M$ 上的 $P$ 维连续光滑单形**($P$ - 单形)理解为 $\sigma_P = (\triangle_P, g)$,其中 $\triangle_P$ 是 $R^P$ 中的直线单形,例如:$\triangle_P = \{t = (t_1, \cdots, t_P) \in R^P : t_j \geqslant 0. t_1 + \cdots + t_P \leqslant 1\}$;$g : \triangle_P \to M$ 是连续微分映射,而且单形具有由坐标 $t_1, \cdots, t_p$ 的次序所定义的某种定向. 如果在 $\triangle_P$ 的邻域选取另一坐标 $\tau_1, \cdots, \tau_P$,当 $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \dfrac{\partial(t_1, \cdots, t_P)}{\partial(\tau_1, \cdots \tau_P)} > 0$ 时,那末定义相同的定向. 当 $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} < 0$ 时,定义相反的定向. 单形 $\sigma_P$ 取相反的定向时记为 $-\sigma_P$. 有限个可定向光滑连续 $P$ 单形的线性组合.

$$C_P = \sum_i m_i \sigma_P^{(i)}, \tag{3.1.70}$$

其中 $m_i$ 为整数,称为**光滑连续 $P$ - 链**(有时为了方便考虑具有实系数或复系数的链). 流形 $M$ 上的 $P$ 链全体构成 — Abel 群 $C_P(M)$. $\sigma_P = (\triangle_P, g)$ 的**承载单形**理解为集合 $|\sigma_P| = g(\triangle_P)$,链(3.1.70)的**承载链**理解为集合 $|C_P| = \bigcup_{m_i \neq 0} |\sigma_P^{(i)}|$. **连续 $P$ - 单形 $\sigma_P$ 的边缘**理解为 $(P-1)$ 一单形 $\sigma_{P-1}^{(i)} = (\triangle_{P-1}^i, g|_{\triangle_{P-1}^i})$,其中 $\triangle_{P-1}^i$ 为直线单形 $\triangle_P$ 的 $(P-1)$ 维边缘. 选取 $R^P \supset \triangle_P$ 中的坐标系 $t_1, \cdots, t_P$ 定义 $\sigma_P$ 的定向,使得边缘 $\triangle_{P-1}^{(i)}$ 位于平面 $t_1 = 0$ 并且在点 $t \in \triangle_P$ 有 $t_1 \leqslant 0$. 那末参数 $t_2, \cdots, t_P$ 定义**边界 $\sigma_{P-1}^i$ 的定向,它和 $\sigma_P$ 的定向协调,定**

**向单形** $\sigma_P$ **的边缘**称为$(P-1)$一链，由它所有协调定向的边缘组成：$\partial\sigma_P=\sum_{i=0}^{P}\sigma_{P-1}^{(i)}$ 链(3.1.70)的边缘由公式 $\partial C_P=\sum_i m_i\partial\sigma_P^{(i)}$ 定义.具有性质

(3.1.71) $$\partial\partial C_P=0.$$

链 $\gamma\in C_P(M)$ 称为**循环**，如果 $\partial\gamma=0$. 性质(3.1.71)表明边缘链是一个循环. 循环 $\gamma$ 称为**同调于零**$(\gamma\sim 0)$，如果存在一链 $C$ 使得 $\partial C=\gamma$. 循环 $\gamma$ 称为**弱同调于零**$(\gamma\approx 0)$，如果对某一正整数 $k$ 有 $k\gamma\sim 0$. 记 $Z_P(M)=\{\gamma\in C_P(M):\partial\gamma=0\}$；$B_P(M)=\{\partial C: c\in C_{P+1}(M)\}$. 商群 $H_P(M)=Z_P(M)/B_p(M)$ 称为**流形** $M$ **的** $P$ **维光滑连续同调群**.

流形 $M$ 和 $N$ 之间的微分映射

(3.1.72) $$f:M\to N$$

使得 $M$ 中的单形 $\sigma_P=(\triangle_P,g)$ 和 $N$ 中的单形 $\underset{\sim}{f}(\sigma_P)=(\triangle_P,f\circ g)$ 对应. 同时定义了一个同态 $\underset{\sim}{f}:C_P(M)\to C_P(N)$.

**流形** $M$ **和 de Rhan 上同调群**　微分形式 $\omega$ 称为**闭的**，如果 $d\omega=0$；如果存在一微分形式 $\varphi$ 使 $\omega=d\varphi$，则 $\omega$ 称为**恰当的**；闭光滑 $P-$形式的集合记为 $Z^P(M)$，恰当光滑 $P-$形式的集合记为 $B^P(M)$. 由外微分的性质(定理 3.1.14 和定理 3.1.6)得到群(向量空间)的包含 关系：$B^P(M)\subset Z^P(M)\subset\Omega^P(M)$.(注意在此以 $\Omega^P(M)$ 记光滑的 $P-$形式空间 $C_P^{(\infty)}(M)$).

商群 $H^P(M)=Z^P(M)/B^P(M)$ 称为**流形** $M$ **的** de Rham $P$ **维上同调群**，它的元素称为**上同调类**. 两个属于同一上同调类的形式 $\omega_1,\omega_2$ 称为**上同调的**$(\omega_1\approx\omega_2)$.

微分映射(3.1.72)诱导一群同态

$$\tilde{f}:\Omega^P(M)\to\Omega^P(M),$$

按下面的方式定义. 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$g=(y_1,\cdots,y_n)$ 是邻域 $U_a,V_b$ 中的局部坐标，点 $a\in M,b\in f(a)\in N$，又形式 $\omega\in\Omega^P(N)$，表成形式

$$\omega(y)=\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{j_1\cdots j_p}(y)dy_{i_1}\cdots dy_{i_p},$$

那末在 $U_a$ 中

(3.1.73) $$\tilde{f}(\omega)(x)=\omega(f(x))=$$
$$=\sum_{i_1,\cdots i_p}a_{i_1\cdots i_p}(y(x))dy_{i_1}(x)\wedge\cdots\wedge dy_{i_p}(x),$$

其中 $dy_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}dx_j$.

**微分形式沿光滑单形和链上的积分** 和上一段(3.1.10)中讨论Stokes公式(定理3.1.11)时类似,$C^{(0)}$ **类 $P$ — 形式沿光滑 $P$ 单形 $\sigma_P=(\triangle_P,g)$ 的积分**,由等式

(3.1.74) $$\int_{\sigma_P}\omega=\int_{\triangle_P}\tilde{g}(\omega)=\int_{|\triangle_P|}A(t)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_P.$$

定义,其中 $A(t)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_P=\tilde{g}(\omega)$ 是 $\triangle_P\subset R^P$ 上的形式,如果形式表成

(3.1.75) $$\omega(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

那末

(3.1.76) $$A(t)=\sum_{i_1\cdots,i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(t_1,\cdots,t_P)}.$$

(3.1.74)中的最后一个积分理解为 $R^P$ 中通常的 $P$ 重积分.显然(3.1.74)关于流形的局部坐标的选择和单形的参数的选择是不变的.**形式 $\omega$ 沿链**(3.1.70)**的积分由等式**

(3.1.77) $$\int_{C_P}\omega=\sum_i m_i\int_{\sigma_P(i)}\omega$$

定义.注意,流形 $M$ 上的每一个紧致的逐块光滑的可定向曲面都可以剖分成光滑单形,即表成链 $C_P\in C_P(M)$.

由同态 $\tilde{f}$ 和 $\underset{\sim}{f}$ 的定义的公式(3.1.74)和(3.1.77)立得

**定理3.1.12** (变量替换公式)设 $f=M\to N$ 为流形的映射,

$\gamma \in C_P(M)$，那末对流形 $N$ 上的每一个 $C^{(0)}$ 类形式 $\omega$ 有

(3.1.78) $$\int_\gamma \underset{\sim}{f}(\omega) = \int_{\underset{\sim}{f}(\gamma)} \omega$$

因此，同态 $\tilde{f}$ 和 $\underset{\sim}{f}$ 关于积分是对偶的. 由同态 $d$ 和 $\partial$ 的对偶性可以证明

**定理 3.1.13** (Stokes 公式) 如果 $\omega$ 是流形 $M$ 上的 $C^{(1)}$ 类 $P$－形式，又 $c \in C_{P+1}(M)$ 那末

(3.1.79) $$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

**推论 3.1.2** 恰 当形式沿循环的积分等于零

**推论 3.1.3** 闭形式沿弱同调于零的循环的积分等于零.

## §3.2 复 流 形

**定义 3.2.1** (复流形). $n$ **维复流形** $M$ 是一个 Hausdorff 拓扑空间 $M$ 具有一个复坐标卡集 $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$，其中配对 $(U_i, \varphi_i)$ 由 $M$ 的开集 $U_i$ 和 $U_i$ 到 $C^n$ 的开子集的同胚映射组成，使得

(3.2.1) $$M = \bigcup_{i \in I} U_i;$$

(3.2.2) $$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

是 $C^n$ 的开子集间的双全纯映射，对所有 $i, j \in I$ 和 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. $\mathscr{A}$ 也称为**对 $M$ 的复结构的坐标卡集**.

全纯函数和复流形之间的全纯映射象上一节 $C^{(k)}$ 流形时一样用一坐标卡中的坐标系表示. 我们用 $A(M)$ 记 $M$ 上的全纯函数空间. 从复流形的开子集 $U$ 到 $C^n$ 的开子集的双全纯映射 $\varphi: U \to \varphi(U) \subset C^n$ 称为**全纯域(复) 坐标系**.

显然 $n$ 维复流形 $M$ 具有一自然的 $2n$ 维 $C^\infty$ 流形的结构；任何全纯坐标系 $\varphi = (z_1, \cdots, z_n)$ 都诱导一 $C^\infty$ 坐标系 $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ 其中 $z_j = x_j + iy_j$; $1 \leqslant j \leqslant n$. 因此 §3.1 所讨论的内容都可以应用到

复流形去

**例 3.2.1** $C^n$ 是 $n$ 维复流形，它的任何开子集，特别是 $C^n$ 中的域显然也是复流形.

**例 3.2.2** 二维定向的(实)曲面是一维复流形.

我们假定曲面是 $C^\infty$ 的并定义一正定的 Riemann 度量 $ds^2$. 根据 Korm — Lichtenstein 定理，一定存在局部的等温坐标(isothermal coordinate) $x,y$ 使 $ds^2$ 局部可表为

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2), \lambda > 0$$

或

$$ds^2 = \lambda^2 dz d\bar{z}, z = x + iy.$$

又曲面的定向由

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

给出. 在两个等温坐标邻域相交处，必有

$$\lambda^2 dz d\bar{z} = ds^2 = \mu^2 dw d\bar{w}, w = u + iv.$$

所以 $dw$ 只能是 $dz$ 或 $d\bar{z}$ 的倍数. 如果复坐标 $z$ 和 $w$ 给出曲面的同一个定向，则 $dw$ 必是 $dz$ 的倍数，即 $dw = fdz$，因此 $w$ 是 $z$ 的全纯 函数. 由 此可见，二维定向曲面必有复流形构造，使它成为一维复流形. 一维复流形又称为 Riemann 曲面.

**例 3.3.3** 复射影空间 $P_n$.

$C^{n+1}$ 空间中的一维子空间(即复直线)全体组成的空间称为**复射影空间**，记为 $P_n$. $C^{n+1}$ 中的复直线可用 $C^{n+1} - \{0\}$ 中的一点表示，在 $C^{n+1} - \{0\}$ 的元素之间定义如下的关系 ～：

$$(z_1, \cdots, z_{n+1}) \sim (w_1, \cdots w_{n+1})$$

当且仅当存在非零复数 $\lambda$，使

$$(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \lambda(w_1, \cdots, w_{n+1})$$

容易验证，这是等价关系，复 $n$ 维射影空间 $P_n$ 就是商空间 $(C^{n+1} - \{0\})/\sim$，其中的元素记作 $[z_1, \cdots, z_{n+1}]$. 数组 $(z_1, \cdots, z_{n+1})$ 称为点 $[z_1, \cdots, z_{n+1}]$ 的齐次坐标，它们被 $P_n$ 中的点确定到差一个非零复数

因子.

命

$$U_i = \{[z_1, \cdots, z_{n+1}] | z_i \neq 0\}.$$

则 $U_i$ 是 $P_n$ 的局部坐标邻域，用 $n+1$ 个邻域 $U_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 就可盖满 $P_n$. 在 $U_i$ 中

$$\begin{aligned}[z_1, \cdots, z_{n+1}] &= z_i[\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{n+1}}{z_i}] \\ &= z_1[\zeta_1, \cdots \zeta_{i-1}, 1\zeta_{i+1}, \cdots, \zeta_{n+1}]\end{aligned}$$

其中

$$\zeta_i = \frac{z_j}{z_i}, 1 \leqslant j \leqslant n+1, j \neq i.$$

因为 $\zeta_j$ 可以取到任意的复数值，所以可用 $\zeta_1, \cdots, \hat{\zeta_i}, \cdots, \zeta_{n+1}$ 表示 $U_i$ 的局部坐标，每一个 $U_i$ 和 $C^n$ 是同胚的. 命 $U_j$ 的局部坐标为 $\eta_1, \cdots, \hat{\eta_j}, \cdots, \eta_{n+1}$，则当 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时，显然有

$$\eta_k = \frac{z_k}{z_j} = \frac{z_{k/z_i}}{z_{j/z_i}} = \frac{\zeta_k}{\zeta_j}, k \neq i, j$$

$$\eta_i = \frac{1}{\zeta_j}, k = i$$

它们都是全纯函数，因此 $P_n$ 是一 $n$ 维复流形.

复一维射影空间 $P_1$ 看作二维实流形时，通常称黎曼球面，因为 $P_1$ 可以作两个坐标域 $U_0, U_1$ 盖住，而且 $U_0$ 与 $P_1$ 只差一点 $P=[0, 1]$，$U_0$ 同胚于 Gauss 复平面，所以黎曼球面 $P_1$ 同胚于 Gauss 复平面的一点紧致化，即二维球面 $S^2$.

**复流形的定向** 我们把 $n$ 维复流形 $M$ 看成 $2n$ 维的实流形，$\varphi \circ_j \varphi_i^{-1}$ 的映射函数 $g_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, g_n(z_1, \cdots, z_n)$ 是全纯函数，命

$$g_\alpha(z) = f_\alpha + i f_{n+\alpha}, \alpha = 1, 2, \cdots, n$$

则 $f_1(x_1 \cdots, x_{2n}), \cdots, f_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n})$ 是把 $M$ 看成实流形时 $\varphi \circ_j \varphi_i^{-1}$ 的映射函数，其中 $z_\alpha = x_\alpha + i\, x_{n+\alpha}, \alpha = 1, 2, \cdots, n$. 这时局部坐标变换

的函数行列式 $\det\frac{\partial f}{\partial x} = |\det\frac{\partial g}{\partial z}|^2$ 必不为零(参阅定理1.1.9及§1.4.2). 所以复流形必是可定向的.

## § 3.3 复结构和$(p,q)$型微分形式

设 $M$ 是一 $n$ 维复流形,其局部坐标为$(z^1,\cdots,z^n)$,命 $z^j = x^j + \sqrt{-1}y^j$, $j=1,\cdots,n$. 在 $M$ 的任一点 $P\in M$ 的切空间 $T_PM$ 中,局部坐标$(z^1,\cdots,z^n)$的变换$(z^1,\cdots,z^n)\to(iz^1,\cdots,iz^n)$诱导出变换

$$(3.3.1)\qquad \frac{\partial}{\partial x^j}\to\frac{\partial}{\partial y^j};\quad \frac{\partial}{\partial y^j}\to-\frac{\partial}{\partial x^j},\ j=1,2,\cdots,n$$

这变换的矩阵为$\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$以此为背景,我们有下面的定义

**定义 3.3.1** 设 $V$ 为实的 $2n$ 维线性空间,如果 $V$ 存在一个自同构 $J$,满足 $J^2=-I$,则 $J$ 称为 $V$ 的一个复结构,显然,如 $V$ 是 $n$ 维复线性空间,则 $Jv = iv(v\in V)$,就是它的一个自然复结构. 同样,如 $M$ 是 $n$ 维复流形,则(3.3.1)就是 $T_PM$ 的一个自然复结构.

设 $J$ 是 $V$ 的一个复结构,$V$ 是一实 $2n$ 维的线性空间,考虑 $V$ 的复化 $V\bigotimes_R C\{V+iV\}$,这是一个复的 $2n$ 维空间,将 $J$ 自然扩充到 $V\bigotimes_R C$ 中去,即 $J(\alpha+i\beta)=J\alpha+iJ\beta$, $\forall\ \alpha,\beta\in V$,那末 $J$ 仍然满足 $J^2=-I$. 在 $V\bigotimes_R C$ 中自然可以定义共轭运算:$\overline{\alpha+i\beta}=\alpha-i\beta$, $\alpha$, $\beta\in V$,在此运算下,$J$ 是实的,即$\overline{Jx}=J\bar{x}$, $\forall\ x\in V\bigotimes_R C$.

根据线性变换的Jordan标准形理论,$V\bigotimes_R C$ 可以分解成关于 $J$ 的根子空间的直接和. 如 $\lambda$ 是 $J$ 的一个特征根,则根子空间 $V_\lambda = \{X|\ (J-\lambda I)^m x = 0\}$,对某 $-m$. 我们有下面的定理

**定理 3.3.1** $V\bigotimes_R C = V_i\bigotimes V_{-i}$, $\dim_C V_i = \dim_C V_{-i} = n$.

**证明** 设 $\lambda$ 是 $J$ 的特征根,则由 $J^2=-I$,易知 $\lambda^2=-1$, $\lambda=\pm i$. 再由 $(J+iI)^2 = 2i(J+iI)$,易知每一根子空间都是 $n$ 维.

此外,如果 $Jx = ix$,则 $J\bar{x} = \overline{Jx} = \overline{ix} = -i\bar{x}$,即 $\bar{V}_i = V_{-i}$,因而两者的维数一样. □

**推论 3.3.1** 命 $W = \{x \in V \otimes_R C \mid (J - iI)x = 0\} = ker(J - iI)$,则

$$V \otimes_R C = W \oplus \bar{W} \tag{3.3.2}$$

**定理 3.3.2** 在(3.3.2)中,$W = (J + iI)(V \otimes_R C) = \mathrm{Im}(J + iI)$,$\bar{W} = \mathrm{Im}(J - iI)$.

**证明** 因为 $J^2 + I = (J - iI)(J + iI) = 0$,因而 $\mathrm{Im}(J + iI) \subset W$,同理 $\mathrm{Im}(J - iI) \subset \bar{W}$. 另一方面,如果 $W_1 = \mathrm{Im}(J + iI)$,$W_2 = \mathrm{Im}(J - iI)$,则可证 $V \otimes_R C = W_1 \oplus W_2$,这是因为 $I = \frac{1}{2i}(J + iI) - \frac{1}{2i}(J - iI)$,同时,如果 $x \in \mathrm{Im}(J + iI) \cap \mathrm{Im}(J - iI)$,即 $x = (J + iI)Y = (J - iI)\tilde{Y}$,则 $(J + iI)^2 Y = (J + iI)(J - iI)\tilde{Y} = 0$,但 $(J + iI)^2 = 2i(J + iI)$,因而 $x = 0$. 故有 $V \otimes_R C = W_1 \oplus W_2$,再由定理 3.1.1 及 $W_1 \subseteq W$,$W_2 \subseteq \bar{W}$ 可知只能 $W_1 = W$,$W_2 = \bar{W}$. □

**定义 3.1.2** 在 $V \otimes_R C$ 中 $W = \mathrm{Im}(J - iI)$ 称为(1,0)型的向量,$\bar{W} = \mathrm{Im}(J + iI)$ 称为(0,1)型的向量.

**定理 3.3.3**

$$\begin{aligned} V^{(1,0)} &= \{x - iJx \mid x \in V\} \\ V^{(0,1)} &= \{x + iJx \mid x \in V\} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

**证明** 任取 $\alpha + i\beta \in V^{(1,0)} = W$,$\alpha, \beta \in V$,则由 $W$ 的定义,可得

$$J(\alpha + i\beta) = J\alpha + iJ\beta = i(\alpha + i\beta) = -\beta + i\alpha,$$

即我们有 $\alpha = J\beta$,$\beta = -J\alpha$,因此

$$\alpha + i\beta = \alpha - iJ\alpha \in \{x - iJx \mid x \in V\}$$

另一方面,易知 $\{x - iJx \mid x \in V\} \subseteq W$. □

**推论 3.3.2** 存在$x_1,\cdots,x_n\in V$，使$\{x_1\cdots,x_n,Jx_1\cdots,Jx_n\}$组成$V$的一组基(实).

**证明** 因为$V^{(1,0)}=\{x-iJx\,|\,x\in V\}$的复维数是$n$，因此存在$x_1,\cdots,x_n\in V$，使$x_1-iJx_1,\cdots,x_n-iJx_n,x_1+iJx_1,\cdots,z_n+iJx_n$组成$V\otimes_R C$的一组基，而$x_1,\cdots,x_n,Jx_1,\cdots,Jx_n$不过是这组基的线性组合而已，它们仍然是线性无关的.□

现在将上述讨论应用到复流形，设$M$是一复流形，对一点$P\in M$，取$P$点的切空间$T_PM$为上述诸定理中的线性空间$V$，设$(z^1,\cdots,z^n)$是$P$点邻域的复局部坐标，令$z^j=x^j+iy^j$，则由定义 3.3.1，$T_PM$的自然复结构为

$$J(\frac{\partial}{\partial x^j})=\frac{\partial}{\partial y^j},J(\frac{\partial}{\partial y^j})=-\frac{\partial}{\partial x^j},j=1,2,\cdots,n. \tag{3.3.4}$$

在此复结构下，其(1,0)型和(0,1)型向量分别为

$$\begin{aligned}\Lambda^{1,0}(T_PM)&=\{\frac{\partial}{\partial x}-iJ(\frac{\partial}{\partial x}),\frac{\partial}{\partial y}-iJ(\frac{\partial}{\partial y})\}\\&=\{\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}+i\frac{\partial}{\partial x}\}=\{\frac{\partial}{\partial z},i\frac{\partial}{\partial z}\}\\&=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\alpha=1,2,\cdots n.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

同理
$$\Lambda^{0,1}(T_PM)=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha},\alpha=1,2,\cdots,n. \tag{3.3.6}$$

显然，这个表达式，在复流形的局部坐标变换下是不变的，即当局部坐标由$(z^1,\cdots,z^n)$变为$(w^1,\cdots,w^n)$时有

$$\Lambda^{1,0}(T_PM)=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial z^\alpha}=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial w^\alpha},\alpha=1,2,\cdots,n. \tag{3.3.7}$$

$$\Lambda^{0,1}(T_PM)=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial \bar{w}^\alpha},\alpha=1,2\cdots,n \tag{3.3.8}$$

总之，我们有

$$\begin{aligned}T_PM\otimes_R C&=\Lambda^{1,0}(T_PM)\bigoplus\Lambda^{0,1}(T_PM)\\&=\bigoplus C\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\bigoplus C\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha},\alpha=1,2,\cdots n.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

切空间 $T_PM$ 的自然复结构诱导一下 $T_P^*M\bigoplus_R C$ 的自然分解如下：

(3.3.10) $$T_P^*M\bigoplus_R C=\Lambda^{1,0}(T_P^*M)\bigoplus\Lambda^{0,1}(T_P^*M),$$

$\Lambda^{0,1}(T_P^*M)$ 为(1,0)型的 1 - 形式空间，其中 $\Lambda^{1,0}(T_P^*M)$ 为(0,1)型的 1 - 形式空间；**全纯**函数的微分是(1,0)型的 1 - 形式，如($z^1,\cdots,z^n$) 是 $P\in M$ 点近旁的全纯坐标，则 $\{dz^1,\cdots,dz^n\}$ 定义 $\Lambda^{1,0}(T_P^*M)$ 的一组基，其共轭空间 $\overline{\Lambda^{1,0}(T_P^*M)}$ 即 $\Lambda^{0,1}(T_P^*M)$ 的基为 $\{d\bar{z}^1,\cdots,d\bar{z}^n\}$.

我们可以将(3.3.10) 推广到更高次的微分形式去. 在点 $P$ 的任一复值 $r$ - 形式 $\omega$ 都是 $r$ - 形式 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r$ 的线性组合，其中 $\omega_j\in T_P^*M\bigotimes_R C$. 根据(3.3.10) 我们可写 $\omega_j=\omega'_j+\omega''_j$，其中 $\omega'_j\in\Lambda^{1,0}$ 和 $\omega''_j\in\Lambda^{0,1}$，由此可知 $\omega$ 可以写成 $\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_r$ 的线性组合，其中 $\eta_j$ 是(1,0)型的或者(0,1)型的，$1\leqslant j\leqslant r$. $r$ - 形式 $\omega$ 称为是 **(p,q) 型的**，$p+q=r$，如果 $\omega$ 可以写成 $r$ - 形式 $\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}\wedge\bar{\omega}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{\omega}_{j_q}$ 的线性组合，其中所有 $\omega_\nu$ 是(1,0)型的(因此最后 $q$ 个因子是(0,1)型的). 我们记点 $P$ 的($p,q$)型形式的空间 $\Lambda_P^{p,q}$，并记 $C_{p,q}^{(k)}$ 为 $C_{p+q}^{(k)}(M)$ 的子空间，它由每一点的($p,q$)型形式组成. 可知

(3.3.11) $$C_r^{(k)}(M)=\bigoplus_{p+q=r}C_{p,q}^{(k)}(M)$$

又

(3.3.12) $$g^{\,k}(M)=\bigoplus_{p,q\geqslant 0}C_{p,q}^{(k)}(M)$$

注意 $C_{p,q}^{(k)}(M)=\{0\}$，如果 $p$ 和 $q>n=\dim_C M$.

如果($z^1,\cdots,z^n$) 是 $U$ 上的全纯坐标，那末 $dz^j\in C_{1,0}^{\infty}(U)$，$1\leqslant j\leqslant n$；且一 ($p,q$) - 形式 $\omega\in C_{p,q}^k(U)$ 有唯一表示

(3.3.13) $$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_pj_1\cdots j_q}dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q},$$

$1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n$

其中系数 $a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\in C^{(k)}(U)$. (3.3.13) 可以写成更紧凑的形式

$$\omega=\sum_{I,J}a_{IJ}dz^I\wedge d\bar{z}^J,\tag{3.3.14}$$

其中求和是对 $\{1,\cdots,n\}$ 中所有**严格增加** $p$ — 重数组 $I$ 和 $q$ — 重数组 $J$ 进行的.

**关于 $C^n$ 的定向** 考虑 $n$ 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的空间 $C^n$, 其中 $z_k=x_k+iy_k, k=1,\cdots,n$, 以后我们选择 $C^n$ 的定向使得

$$\int_D x_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n=\tag{3.3.15}$$

$$=\left(-\frac{i}{2}\right)^n\int_D d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n>0.$$

$D$ 的边界 $\partial D$ 的定向是由 $D$ 的定向诱导的. 如果 $D=\{z:r(z)<0\}$, 其中 $r$ 是在 $\partial D$ 的邻域中的一 $C^{(r)}$ 类实值函数,使得在 $\partial D$ 上 $dr=gradr=(r'_{z_1}\cdots,r'_{z_n})\neq 0$,, 那末我们记 $\partial D\in C^{(r)}$. 由 Stokes' 公式

$$(-i)^n\int_{\partial D}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{k-1}\wedge d\bar{\zeta}_{k+1}\tag{3.3.16}$$

$$\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n>0.$$

注意有些著作是选择 $C^n$ 的定向使得

$$\int_D dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n=\tag{3.3.17}$$

$$\left(-\frac{i}{2}\right)^n\int_D d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\wedge dz_n>0.$$

容易看出按这个定向计算的积分和按(3.3.15) 的定向计算的积分相差一因子 $(-1)^{n(n-1)/2}$.

## § 3.4 向量丛和全纯向量丛

本节我们介绍复流形上的复向量丛和全纯向量丛的概念.

**定义 3.4.1** (复向量丛)Hansdorff 拓扑空间 $E$ 称为复流形 $M$ 上的秩为 $r$ 的**复向量丛**,如果存在一连续映射(投射)$\pi:E\to M$,满

足下列三条件：

1) $E_P=\pi^{-1}(P),\forall P\in M$，是一个复的 $r$ 维线性空间，即 $E_P\simeq C^r$. $E_P$ 称为E在 $P$ 点的**纤维**，换句话说，在 $E$ 上的每一点附上一个 $r$ 维的复线性空间.

2) 对每一点 $P\in$ E，存在 $P$ 的一个邻域 $U$，使 $U$ 上的所有纤维和 $U\times C^r$ 同胚，即存在同胚映射 $\varphi_U$

(3.4.1) $$\varphi_U:U\times C^r\to\pi^1(U)$$

满足

$$\pi\circ\varphi_U(x,\xi)=x,x\in U,\xi\in C^r.$$

3) 对 $U\cap V\neq\varnothing$ 的两个局部邻域 $U,V$，存在一个 $C^\infty$ 映射 $g_{UV}:U\cap V\to GL(r,C)$ 对 $C^r$ 中的 $\xi_U\in C^r,\xi_V\in C^r$，使

(3.4.2) $$\varphi_U(P,\xi_U)=\varphi_V(P,\xi_V),P\in U\cap V$$

成立的充要条件是

(3.4.3) $$\xi_V=\xi_U g_{UV}(P),P\in U\cap V.$$

其中 $g_{UV}$ 看成是 $r\times r$ 非异矩阵，称为**连接函数**，连接函数 $g_{UV}$ 满足相容条件：

$$g_{VU}(P)=g_{UV}^{-1}(P),P\in U\cap V\neq\varnothing,$$

(3.4.4) $$g_{UV}(P).g_{VW}(P)\cdot g_{WU}(P)=I,P\in U\cap V\cap W\neq\varnothing.$$

复向量丛 $E\to M$，有时记为 $(E,M,\pi)$，其中 $E$ 称为**丛空间**，$M$ 称为**底空间**，$\pi$ 称为**丛投影**，$C^r$ 是**纤维型**.

在上述定义中的邻域 $U$ 和同胚映射 $\varphi_U$ 一起通常称为向量丛 $(E,M,\pi)$ 的**局部平凡化邻域**. (3.4.2) 和(3.4.3) 表明，$M$ 上任一点的纤维中的向量在不同的平凡化邻域中有不同的坐标，坐标之间的转换关系由连接函数表征，它只与该点有关，而与纤维中的向量无关.

复向量丛 $E\to M$ 的定义中主要的是连接函数. 事实上，只要给出一组局部平凡化邻域及满足相容条件(3.4.4) 的一组连接函数，就可以将同一纤维中的向量在不同坐标邻域中按(3.4.2)(3.

4.3）等同起来而得到一个复向量丛 $E$.

在上述定义 3.4.1 中如果 $g_{UV}$ 是复全纯函数，则可得到全纯向量丛，也就是我们有下述全纯向量丛的定义：

**定义 3.4.2** （全纯向量丛） 在复向量丛的定义 3.4.1 中，将连接函数 $g_{UV}$ 由 $C^\infty$ 映射：$U \cap V \to GL(r;C)$ 改为全纯映射：$U \cap V \to GL(r;C)$，其它照旧，则此时的向量丛 $E$ 称为 $M$ 上的全纯向量丛.

同理，对 $C^\infty$ 微分流形也可以类似地定义 $C^\infty$ 向量丛.

注意，复向量丛 $E \to M$ 的秩（即每一纤维的复维数）$r$，一般并不等于 $M$ 的维数. $r = 1$ 的复向量丛称为**复线丛**，而 $r = 1$ 的全纯向量丛称为**全纯线丛**.

**例 3.4.1** 平凡丛

$E = M \times C^r$ 称为平凡丛，这时 $\pi$ 是自然投射

$$\pi: E = M \times C^r \to M,$$

连接函数 $g_{UV} = I$.

**例 3.4.2** 切丛

这是一个最重要的向量丛，也是向量丛概念的背景，设 $M$ 是实微分流形，$U_\alpha$ 是 $M$ 的一组局部坐标邻域，$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$，设 $U_\alpha$ 的局部坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$，$U_\beta$ 的局部坐标为 $(y^1, \cdots, y^n)$；如 $P \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，取 $P$ 点的切空间 $T_PM$ 为 $E_P$，即令 $E_P = T_PM$. 将 $U_\alpha$ 和同胚映射

$$\varphi_U: U_\alpha \times R^n \leftrightarrow U_\alpha \times T_PM$$

取为平凡化邻域，任取 $\xi \in E_P$，那末 $\xi$ 在 $U_\alpha \times R^n$ 和 $U_\beta \times R^n$ 中将有不同的坐标表示，前者为 $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，后者为 $\xi = \sum \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$，由于

$$\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \tag{3.4.5}$$

所以

$$(3.4.6)\quad \begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\xi}^1\\ \vdots\\ \tilde{\xi}^n\end{pmatrix},\xi^i=\tilde{\xi}^j\frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

即连接函数

$$(3.4.7)\quad g_{\alpha\beta}(p)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}$$

当 $M$ 是一个 $n$ 维复流形，$p\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，如 $U_\alpha$ 的复局部坐标为 $(z^1,\cdots,z^n)$，$U_\beta$ 的复局部坐标为 $(w^1,\cdots,w^n)$，命 $E_P=\{\sum a^i\frac{\partial}{\partial z^i}\Big|_P,a^i\in C\}$，那末得到的向量丛是一个全纯向量丛，这是因为连接函数

$$(3.4.8)\quad g_{\alpha\beta}(p)=\begin{pmatrix}\frac{\partial z^1}{\partial w^1} & \cdots & \frac{\partial z^1}{\partial w^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial z^n}{\partial w^1} & \cdots & \frac{\partial z^n}{\partial w^n}\end{pmatrix}$$

是 $P$ 的全纯函数.

这一向量丛并不就是 $M$ 的切丛，因为 $E_P$ 只是 $M$ 在 $P$ 的切空间中由(1,0)型向量组成的子空间. 这个丛我们称之为复流形 $M$ 的**全纯切丛**，记作 $T^{(1,0)}(M)$.

**例 3.4.3**　全纯余切丛 $T^{*(1,0)}(M)$.

设 $M$ 是一复流形，$\{U_\alpha\}$ 是 $M$ 的一组局部坐标邻域 $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$，设 $U_\alpha$ 的复局部坐标为 $(z^1,\cdots,z^n)$，$U_\beta$ 的复局部坐标为 $(w^1,\cdots,w^n)$，$P\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则按下述方法决定的向量丛称为**全纯余切丛**.

取纤维 $E_P=\{\sum a_i dz^i\}$

平凡化邻域为 $U_\alpha,U_\beta$ 和同胚映射

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times C^n = \{p; a_1, \cdots, a_n\} \leftrightarrow E_p = \pi^{-1}(p), p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

$$\varphi_\beta : U_\beta \times C^n = \{p; b_1, \cdots, b_n\} \leftrightarrow E_p = \pi^{-1}(p), p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

由

$$\sum b_i dw^i = \sum b_i \frac{\partial w^i}{\partial z^j} dz^j = \sum a_j dz^j \tag{3.4.9}$$

可知连接函数为

$$g_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial z^1} & \cdots & \frac{\partial w^n}{\partial z^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial w^1}{\partial z^n} & \cdots & \frac{\partial w^n}{\partial z^n} \end{pmatrix} \tag{3.4.10}$$

它是 $p$ 的全纯函数.

由例 3.4.2,例 3.4.3 说明当 $E$ 是 $M$ 上的切丛时,其连接函数 $g_{\alpha\beta}$ 是由坐标变换的 Jacobi 矩阵组成的.余切丛的连接函数恰好是 $g_{\alpha\beta}$ 的转置逆矩阵,所以我们称余切丛是切丛**的对偶丛**.

## §3.5 向量丛的联络和曲率

**定义 3.5.1** (截面) 设 $\pi: E \to M$ 是复流形 $M$ 的 $r$ 维复向量丛,$G \subset M$ 是一开集.映射 $S: G \to E$ 称为复向量丛$(E, M, \pi)$在 $G$ 上的截面,如果

$$\pi \circ S(p) = P, \forall P \in G. \tag{3.5.1}$$

如果$U_i$ 是 $M$ 的一组局部平凡化邻域,那末 $S|_{G\cap U_i}$ 可表为

$$(P, S_1(P), \ldots, S_r(P)) \in U_i \times C^r \tag{3.5.2}$$

特别,如果$S_j(P), j = 1, \cdots, r$ 对 $P$ 是全纯的,则称 $S$ 是**全纯截面**,如果对 $P$ 是 $C^\infty$ 的,则称 $S$ 是**光滑截面**.今后的讨论,除非特别声明,所有截面都假定是光滑截面.

将 $U$ 中 $E$ 值截面的全体记作 $\Gamma(U, E)$,当不强调截面的定义域是整个流形 $M$ 或 $M$ 的某一局部时,则简记为 $\Gamma(E)$.

一组 $r$ 个截面 $(S_1,\cdots,S_r)$ 称为其定义域上的一组**标架场**，如果对定义域中的任一点 $x$，$S_1(x),\cdots,S_r(x)$ 在 $E_x$ 中都是线性无关的，则 $S_1(x)\cdots,S_r(x)$ 组成 $E_x$ 的一组基. 显然，当取定一组标架

$$S = {}^t(S_1,\cdots,S_r)$$

时，那末任何截面 $\xi\in\Gamma(E)$ 都可以相对于 $S$ 表成

$$\xi = \sum_{j=1}^{r}\xi^j(x)S_j(x) = (\xi^1,\cdots,\xi^r)^tS. \tag{3.5.3}$$

设 $\xi\in\Gamma(U,E)$，按定义，它并不依赖于截面标架场的选择. 如果 $S' = {}^t(S'_1,\cdots,S'_r)$ 是 $U$ 上另一局部标架场，则可设

$$S' = AS. \tag{3.5.4}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^r \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_r^1 & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

这里 $a_i^j$ 是 $U$ 上的光滑函数，并且 $detA\neq 0$. 设 $\xi\in\Gamma(U,E)$ 在标架 $S$ 和 $S'$ 下的表示分别为 $\xi=(\xi^1,\cdots\xi^r)$，$\xi'=(\xi^{1'},\cdots,\xi^{r'})$，那末有

$$\xi' S' = \xi S, \xi' AS = \xi S,$$

所以 $\xi\in\Gamma(U,E)$ 在不同标架下的表示有下述关系

$$\xi' = \xi A^{-1}. \tag{3.5.5}$$

要对向量丛的截面，即流形上的向量场进行微分，必须在向量丛上引进所谓"联络"的结构，使得复向量丛 $E$ 的截面的微分还是 $E$ 的截面，我们有下面的

**定义 3.5.2** （联络） 向量丛 $E$ 上的联络是一个映射

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(T^*(M)\otimes E), \tag{3.5.6}$$

它满足下列条件：

1) 对任意的 $S_1,S_2\in\Gamma(E)$ 有

$$D(S_1+S_2) = DS_1 + DS_2,$$

2) 对 $S\in\Gamma(E)$ 及任意的 $f\in C^\infty(M)$，有

$$D(fs) = df\otimes S + fDS.$$

若 $x$ 是复流形 $M$ 上的光滑切向量场，$S\in\Gamma(E)$，命

(3.5.7) $$D_xS=\langle x,DS\rangle,$$

其中记号 $\langle,\rangle$ 是指 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 之间的配合，则 $D_xS$ 是 $E$ 的截面，称为截面 $S$ 沿切向量场 $x$ 的绝对微商.

由(3.5.3)每一截面都可以由标架场线性表示，因此要确定 $D$，只需要对一组标架 $S={}^t(S_1,\cdots,S_r)$ 给出 $DS$ 就可以了，在局部上，联络是由一组一次微分式给出的. 设 $U$ 是 $M$ 的一个坐标邻域，局部坐标是 $z^i,1\leqslant i\leqslant n$. 显然在每一点 $P\in U$，$\{dz^i\otimes S_\alpha,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant\alpha\leqslant r\}$ 构成张量空间 $T_P^*\otimes E$ 的基底.

因为 $DS_\alpha$ 是从 $T_P^*(M)\otimes E$ 在 $U$ 上的局部截面，所以可以命

(3.5.8) $$DS_\alpha=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant\beta\leqslant r}\Gamma_{\alpha_i}^\beta dz^i\otimes S_\beta,$$

其中 $\Gamma_{\alpha_i}^\beta$ 是 $U$ 上的光滑函数，记

(3.5.9) $$\omega_\alpha^\beta=\sum_{i=1}^n\Gamma_{\alpha_i}^\beta dz^i,$$

则(3.5.8)可写成

(3.5.10) $$Ds_\alpha=\sum_{\beta=1}^r\omega_\alpha^\beta\otimes S_\beta.$$

引进矩阵记号，以便使计算简化，命

(3.5.11) $$\omega=(\omega_\alpha^\beta)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r}=\begin{pmatrix}\omega_1^1 & \cdots & \omega_1^r\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_r^1 & \cdots & \omega_r^r\end{pmatrix}$$

则(3.5.9)式可记成

(3.5.12) $$DS=\omega\otimes S$$

矩阵 $\omega$ 称为**联络方阵**，它依赖于局部标架场的选取.

当 $\omega$ 给定后，如 $\xi=\sum\xi^\alpha S_\alpha\in\Gamma(E)$，则

(3.5.13) $$D\xi=\sum_{\alpha=1}^r(\alpha\xi^\alpha+\sum_{\beta=1}^\alpha\xi^\beta\omega_\beta^\alpha)S_\alpha$$

或简写为

(3.5.14) $$D\xi=d\xi+\xi\omega.$$

如果 $S' = {}^t(S'_1, \cdots, S'_r)$ 是 $U$ 上的另一个局部标架场，则可设

$$S' = AS,$$

其中 $A$ 为(3.5.14)中的 $A$. 设联络 $D$ 关于局部标架场 $S'$ 的方阵是 $\omega'$，则由联络条件得到

$$(3.5.15)\qquad DS' = dA \otimes S + A \cdot DS = (dA + A \cdot \omega) \otimes S$$
$$= (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S',$$

所以

$$(3.5.16)\qquad \omega' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1},$$

这就是联络方阵在局部标架场改变时的变换公式.

对(3.5.16)式求一次外微分，则得

$$(3.5.17)\quad d\omega' \cdot A - \omega' \wedge dA = dA \wedge \omega + A \cdot d\omega,$$

其中矩阵之间的外积"$\wedge$"表示矩阵在相乘时，元素的积是外积. 再由(3.5.16)

$$dA = \omega' \cdot A - A \cdot \omega$$

以之代入(3.5.17)式则有

$$(3.5.18)\qquad (d\omega' - \omega' \wedge \omega') \cdot A = A \cdot (d\omega - \omega \wedge \omega).$$

**定义 3.5.3** (曲率方阵)$\Omega = dw - \omega \wedge \omega$ 叫做联络 $D$ 在 $U$ 上的曲率方阵.

将(3.5.18)写成

$$(3.5.19)\qquad \Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1},$$

这是曲率方阵在局部标架场改变时的变换公式. 值得注意的是，$\Omega$ 的变换公式是齐次的，而联络方阵 $\omega$ 的变换公式不是齐次的.

**定理 3.5.1** 曲率方阵 $\Omega$ 满足 Bianchi 恒等式

$$(3.5.20)\qquad d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.$$

**证明** 对 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 的两边求外微分得到

$$d\Omega = - d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega$$
$$= - (\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega)$$
$$= - \Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega. \quad \square$$

如果向量丛 $E$ 的截面 $S$ 满足条件

(3.5.21) $$DS = 0,$$

则称 $S$ 是**平行截面**.零截面是显然的平行截面,但是,一般来说,非零的平行截面是不一定存在的.

**定义 3.5.4** 设 $\gamma$ 是 $M$ 中的一条参数曲线,$x$ 是 $\gamma$ 的切向量场,若向量丛 $E$ 在 $\gamma$ 上的截面 $S$ 满足方程

(3.5.22) $$D_x S = 0,$$

则称 $S$ 沿曲线 $\gamma$ 是平行的.

在 $M$ 的一个坐标邻域 $U$ 上,设 $\gamma$ 的方程是

(3.5.23) $$z^i = z^i(t), 1 \leqslant i \leqslant n,$$

曲线 $\gamma$ 的切向量场是

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{dz^i}{dt} \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

设 $S$ 是 $U$ 上的局部标架场,则 $S = \sum_{\alpha=1}^{r} \xi^\alpha S_\alpha$ 是沿曲线 $\gamma$ 的平行截面,当且仅当它满足方程组

$$\langle X, DS \rangle = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i} \Gamma^\alpha_{\beta i} \frac{dz^i}{dt} \xi^\beta\right) S_\alpha = 0,$$

即

(3.5.24) $$\frac{d\xi^\alpha}{dt} + \sum_{\beta,i} \Gamma^\alpha_{\beta i} \frac{dz^i}{dt} \xi^\beta = 0, 1 \leqslant \alpha \leqslant r.$$

由于(3.5.24)是常微分方程组,对于任意给定的初始值,它的解是唯一存在的.由此可见在 $\gamma$ 上一点 $P$ 任意给定一个向量 $v \in E_P$,则它在 $\gamma$ 上唯一地决定一个沿曲线 $\gamma$ 平行的向量场,称为向量 $v$ 沿曲线 $\gamma$ 的平行移动.

## § 3.6 Hermite 全纯向量丛

前面两节我们介绍了复流形上的复向量丛的概念,并研究了

复流形上每一点的纤维的复线性结构. 本节我们考虑复向量丛上的 Hermite 结构问题.

**定义 3.6.1** (Hermite 结构) 设 $E \to M$ 是复流形 $M$ 上的复向量丛, 如果对 $M$ 上任一点 $x$ 的纤维 $E_x$ 都具有一 Hermite 内积, 即对 $M$ 中的任一开集 $U$ 和 $U$ 上的任意两个 $E$ － 截面 $\xi,\eta \in \Gamma(U,E)$ 都有 Hermite 内积 $\langle\xi,\eta\rangle(x) = \langle\xi(x),\eta(x)\rangle$, 并且是 $x \in U$ 的 $C^\infty$ 函数, 则称 $\langle\xi,\eta\rangle(x)$ 是 $E$ 上的 Hermite 结构.

若对任意的 $\xi \in \Gamma(U,E)$, $\xi \neq 0$ 都有

$\langle\xi,\xi\rangle(x) = \langle\xi(x),\xi(x)\rangle > 0$

则称 hermite 结构 $\langle\xi,\eta\rangle(x)$ 是正定的.

如果我们取 $U$ 上的一组 $E$ － 截面标架 $S_1,\cdots,S_r$, 命

$$h_{i\bar{j}} = \langle S_i,S_j\rangle(x) \tag{3.6.1}$$

那末任何 $\xi \in \Gamma(U,E)$ 和 $\eta \in \Gamma(U,E)$ 都可表成 $\xi = \sum_i \xi^i S_i$, $\eta = \sum_j \eta^j S_j$, 并且

$$\begin{aligned}\langle\xi,\eta\rangle(x) &= \sum \xi^i \overline{\eta^j} \langle S_i,S_j\rangle(x) \\ &= \sum \xi^i \overline{\eta^j} h_{i\bar{j}},\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

这时 Hermite 结构的定义相当于要求 $h_{ij}(x)$ 是 $x$ 的 $C^\infty$ 函数.

**定义 3.6.2** (Hermite 向量丛), 设 $(E,M,\pi)$ 是 $n$ 维复流形 $M$ 上的 $r$ 维复向量丛, 若对每一点 $x \in M$ 都在纤维 $E_x$ 上给定一个正定的 Hermite 结构, 则称在 $E$ 上给定了一个 Hermite 结构. 有给定的 Hermite 结构的复向量丛称为 Hermite 向量丛.

**定理 3.6.1** 复流形 $M$ 的任何复向量丛 $E \to M$ 都容许一 Hermite 结构.

**证明** 根据复流形的定义, $M$ 是有局部有限的开复盖 $\{U_\alpha\}$, 我们可以在每一 $E|_{U_\alpha}$ 上取一组截面标架 $\{S_1^\alpha\cdots,S_r^\alpha\}$, 在 $E|_{U_\alpha}$ 上定义 Hermite 内积

$\langle \xi, \eta \rangle^{a}(x) = \sum_{i} \xi^{i} \overline{\eta^{i}}(x)$，其中 $\xi = \sum \xi^{i}_{a} S^{a}_{i}, \eta = \sum \eta^{i} S^{a}_{i}$. 另一方面，因为 $\{U_a\}$ 是局部有限复盖，所以存在从属于它的单位分解 $\{\rho_a(x)\}$，熟知它满足：

$$\rho_a(x) \in C_0^{\infty}(U_a), 0 \leqslant \rho_a \leqslant 1, \sum \rho_a(x) = 1.$$

命

$$\langle \xi, \eta \rangle (x) = \sum_{a} \rho_a(x) \langle \xi, \eta \rangle^{a}(x),$$

则 $\langle \xi, \eta \rangle (x)$ 就是整体定义在 $M$ 上的 Hermite 结构，并且是 $C^{\infty}$ 的. □

前面所介绍的是向量丛的联络和曲率的一般概念，如果不附加其它条件，则这样的联络因而曲率可以很多，显然有意义的联络必须和丛空间的几何性质，特别是和它的结构联系在一起.

设 $E \to M$ 是 Hermite 全纯向量丛，由定义，对每一 $x \in M$，纤维 $E_x$ 中都有一 Hermite 结构 $h = (h_{a\bar{\beta}}(x))$，其中 $x \to h_{a\bar{\beta}}(x)$ 是 $C^{\infty}$ 的，如果我们在 $x$ 附近选定一组**全纯截面**标架 $\{e_a\}$，则可取 $h_{a\bar{\beta}} = \langle e_a, e_\beta \rangle$.

**定义 3.6.3**（容许联络）Hermite 全纯向量丛的联络 $D$ 称为和 Hermite 结构 $\langle \xi, \eta \rangle (x)$ 是相容的，如果对 $\forall\ \xi, \eta \in \Gamma(M, E)$，都有

(3.6.3) $$d\langle \xi, \eta \rangle = \langle D\xi, \eta \rangle + \langle \xi, D\eta \rangle.$$

**注**：*i*) 公式(3.6.3) 也可写成下面的公式(3.6.4). 这是因为在全纯截面标架 $\{e_a\}$ 下，如联络形式 $\omega = \{\omega_a^{\beta}\}$，则 $De_a = \omega_a^{\gamma} e_\gamma, De_\beta = \omega_\beta^{\gamma} e_\gamma$，这时由(3.6.3) 得

$$\begin{aligned} dh_{a\bar{\beta}} &= d\langle e_a, e_\beta \rangle = \langle De_a, e_\beta \rangle + \langle e_a, e_\beta \rangle \\ &= \sum \omega_a^{\gamma} \langle e_\gamma, e_\beta \rangle + \sum \overline{\omega_\beta^{\gamma}} \langle e_a, e_\gamma \rangle \\ &= \sum \omega_a^{\gamma} h_{\gamma\bar{\beta}} + \sum \overline{\omega_\beta^{\gamma}} h_{a\bar{\gamma}}, \end{aligned}$$

即我们有

(3.6.4) $$dh = \omega h + h^{t}\overline{\omega}.$$

*ii*) 条件(3.6.3) 的几何意义是：对于沿任意一条曲线平行的

任意两个向量场 $\xi,\eta,\langle\xi,\eta\rangle$ 是常数. 这是因为 $D\xi=D\eta=0$(参考定义 3.5.4),因而

$$d\langle\xi,\eta\rangle=\langle D\xi,\eta\rangle+\langle\xi,D\eta\rangle=0.$$

联络 $D$ 除了相容条件(3.6.3)这一自然要求外,在 $E\to M$ 是全纯向量丛的假定下,通常我们还希望当 $\xi$ 是全纯截面时,$D\xi$ 是(1,0) 形式的,因为(见(3.5.14))

$$D\xi=d\xi+\xi\omega=\partial\xi+\bar{\partial}\xi+\xi\omega=\partial\xi+\xi\omega,$$

所以 $D\zeta$ 是(1,0) 形式的充要条件是 $\omega$ 是(1,0) 形式的,因此我们有

**定义 3.6.4** 设 $E\to M$ 是 Hermite 全纯向量丛,联络 $D$ 称为 Hermite 结构 $h$ 的(0,1) 型联络,如果 $D$ 满足:

*i*) $D$ 和 $h$ 是相容的,

*ii*) 联络形式 $\omega$ 是(1,0) 形式的. $E$ 的(1,0) 型联络又称为 $E$ 的**自然联络**

**定理 3.6.2** Hermite 全纯向量丛的(1,0) 型联络由其结构 $h$ 唯一决定,它的联络形式 $\omega$ 和由它所决定的曲率 $\Omega$ 的表达式分 别为

$$\omega=\partial h\cdot h^{-1},\tag{3.6.5}$$

$$\Omega=-(\partial\bar{\partial}h)h^{-1}+(\partial h)h^{-1}\wedge(\bar{\partial}h)h^{-1}.\tag{3.6.6}$$

**证明** 由(3.6.4),$dh=\partial h+\bar{\partial}h=\omega h+h{}^t\bar{\omega}$,因为 $\omega$ 是(1,0) 形式的,故只能有 $\partial h=\omega h$,因而有

$$\omega=\partial h\cdot h^{-1}.$$

因为 $\partial h^{-1}=-h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}$,所以

$$\begin{aligned}\partial\omega&=\partial(\partial h\cdot h^{-1})=-\partial h\wedge\partial h^{-1}=\partial h\wedge h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}\\&=\partial h\cdot h^{-1}\wedge\partial h\cdot h^{-1}=\omega\wedge\omega.\end{aligned}$$

再由曲率方阵定义 3.5.3

$$\begin{aligned}\Omega&=d\omega-\omega\wedge\omega=\partial\omega+\bar{\partial}\omega-\omega\wedge\omega\\&=\bar{\partial}\omega=\bar{\partial}(\partial h\cdot h^{-1})=(\bar{\partial}\partial h)h^{-1}-\partial h\wedge\bar{\partial}h^{-1}\end{aligned}$$

$$= -(\partial\bar{\partial} h)h^{-1} + (\partial h)h^{-1} \wedge (\bar{\partial} h)h^{-1}.$$

最后我们再验证联络方阵 $\omega = \partial h \cdot h^{-1}$ 在局部标架场改变时满足变换公式(3.5.16).设 ${}^t(e'_1,\cdots,e'_r)$ 是另一局部全纯标架,命

$${}^t(e'_1,\cdots,e'_r) = A^t(e_1,\cdots,e_r).$$

注意其中 $A$ 是全纯的,设在新的全纯标架下的 Hermiat 结构为 $h'$,联络方阵为 $\omega'$,则我们有 $h' = Ah^t\bar{A}$,

$$\begin{aligned}\omega' A &= (\partial h')h'^{-1}A = [\partial(Ah^t\bar{A})](Ah^t\bar{A})^{-1}A \\ &= [\partial Ah^t\bar{A} + A\partial h^t\bar{A}]^t\bar{A}^{-1} \cdot h^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \\ &= \partial A + A\partial h \cdot h^{-1} = \partial A + A\omega \\ &= dA + A\omega(\text{因为 } \bar{\partial}A = 0) \qquad \square\end{aligned}$$

对 $dh = \omega h + h^t\bar{\omega}$ 微分,则得

$$\begin{aligned}0 &= d\omega \cdot h - \omega \wedge dh + dh \wedge {}^t\bar{\omega} + hd^t\bar{\omega} \\ &= (d\omega - \omega \wedge \omega)h + h(d^t\bar{\omega} + {}^t\bar{\omega} \wedge {}^t\bar{\omega}),\end{aligned}$$

即

$$\Omega h + h^t\bar{\Omega} = 0, \tag{3.6.7}$$

所以 $\Omega h$ 是反 Hermite 的.

特别,当 $e = (e_1,\cdots,e_r)$ 是单位正交标架时,由 $dh = \omega h + h^t\bar{\omega}$ 及(3.6.7)立得

$$\omega + {}^t\bar{\omega} = 0, \tag{3.6.8}$$

$$\Omega + {}^t\bar{\Omega} = 0. \tag{3.6.9}$$

下面我们写出上述曲率矩阵的局部坐标表达式.设 $M$ 的局部坐标为 $(z^1,\cdots,z^n)$,因为纤维的秩 $r$ 一般并不等于 $M$ 的维数 $n$,因此我们用 $\alpha,\beta$ 表示纤维的指标,即 $1 \leqslant \alpha,\beta,\cdots \leqslant r$,用 $i,j$ 表示 $M$ 的局部坐标的指标,即 $1 \leqslant i,j,\cdots, \leqslant n$.

由(3.6.6)可以看出,$\Omega$ 是一个 $r \times r$ 的方阵,其元素是(1,1)形式,记 $h^{-1} = (h^{\bar{\alpha}\beta})$,则可记

$$\Omega = (\Omega_\alpha^\beta), \Omega_\alpha^\beta = \sum R_{\alpha i\bar{j}}^\beta dz^i \wedge d\bar{z}_j \tag{3.6.10}$$

由(3.6.6)可得

(3.6.11) $$R^{\beta}_{\alpha i\bar j} = -h^{\beta\bar\gamma}\frac{\partial^2 h_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z^i\partial\bar z^j} + h^{\delta\bar\gamma}h^{\beta\bar\tau}\frac{\partial h_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z^i}\frac{\partial h_{\delta\bar\tau}}{\partial\bar z^j}$$

记

(3.6.12) $$(\Omega_{\alpha\bar\beta}) = \Omega h = (\sum_s \Omega^s_\alpha h_{s\bar\beta})$$

(3.6.13) $$\Omega_{\alpha\bar\beta} = \sum_s \Omega^s_\alpha h_{s\bar\beta} = \sum h_{s\bar\beta}R^s_{\alpha i\bar j}dz^i\wedge d\bar z^j = -R_{\alpha\bar\beta i\bar j}dz^i\wedge d\bar z^j$$

其中

(3.6.14) $$R_{\alpha\bar\beta i\bar j} = \frac{\partial^2 h_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^i\partial\bar z^j} - h^{\iota\bar\gamma}\frac{\partial h_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z^i}\frac{\partial h_{\iota\bar\beta}}{\partial\bar z^j},1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

注意,$\Omega h$ 是反 Hermite 的,因此有

(3.6.15) $$\overline{\Omega_{\alpha\bar\beta}} = -\Omega_{\beta\bar\alpha},即\ \overline{R_{\alpha\bar\beta i\bar j}} = R_{\beta\bar\alpha j\bar i}.$$

我们常把 $\sum R^{\beta}_{\alpha i\bar j}dz^i\wedge d\bar z^j$ 和 $-\sum R_{\alpha\bar\beta i\bar j}dz^i\wedge d\bar z^j$ 称为丛 $E$ 的曲率形式,当全纯标架在所论点是单位正交时,两者是一样的.

当适当选取标架时可以简化许多问题的证明和计算,我们有下列

**定理 3.6.3** 对于 Hermite 全纯向量丛 $E\to M$ 的任一点 $P\in M$(设其局部坐标 $z=0$),存在一组局部全纯标架,使对这组全纯标架而言,在 $z=0$ 附近有

(3.6.16) $$h(z) = I + 0(|z|^2),$$

其自然联络在 $P$ 点的曲率为

(3.6.17) $$\Omega(0) = \bar\partial\partial h(0).$$

**证明** 设原标架是 $e=(e_1,\cdots,e_r)$,其结构为 $h$,因为 $h(0)$ 是定正的,因而存在一非异线性变换 $B$,使 $Bh(0)^t\bar B = I$

记新的全纯标架 $\tilde e = Be$,那末在标架 $\tilde e$ 下的结构 $\tilde h = Bh^t\bar B$,因而有 $\tilde h(0) = I$,即

$$\tilde{h}(z) = I + 0(z).$$

再取一新的全纯标架 $e' = c\tilde{e}$，这里 $C = I + A(z)$，$A(z)$ 是一对 $z$ 线性的待定矩阵，于是在标架 $e'$ 下结构 $h'$ 有

$$\begin{aligned} h' &= c\tilde{h}{}^t\overline{C} = (I + A(z))\tilde{h}(I + {}^t\overline{A(z)}) \\ &= \tilde{h} + A(z)\tilde{h} + \tilde{h}{}^t\overline{A(z)} + 0(|z|^2) \\ &= I + A(z) + {}^t\overline{A(z)} + \tilde{h} \end{aligned}$$

的一次项 $+ 0(|z|^2)$.

因为 ${}^t\overline{\tilde{h}} = \tilde{h}$，所以 ${}^t(A(z) + {}^t\overline{A(z)} + \tilde{h}) = A(z) + {}^t\overline{A(z)} + \tilde{h}$，因此可以找到 $z$ 的线性矩阵 $A(z)$，使 $A(z) + {}^t\overline{A(z)} + \tilde{h}$ 的一次项 $= 0$. 因而有

$$h'(z) = I + 0(|z|^2).$$

当然这时也有 $h'^{-1}(z) = I + 0(|z|^2)$，由曲率公式(3.6.6)即得

$$\Omega(0) = \bar{\partial}\partial h'(o). \quad \square$$

## §3.7 Hermite 流形和 Kaehler 流形

**定义 3.7.1** 设 $M$ 是一 $n$ 维复流形，若在 $M$ 的全纯切丛上给定一个正定的 Hermite 结构 $h$，则称为 $M$ 为一 Hermite 流形.

如果我们取一组局部复坐标 $z^1,\cdots,z^n$，则全纯切丛的自然基 $\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^n}$，是此丛的一组全纯截面基，如果对这组基而言，Hermite 结构为 $\langle\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\rangle = h_{i\bar{j}}$，那末二次微分式

$$ds^2 = \sum h_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j \tag{3.7.1}$$

与局部坐标系 $z^i$ 的选取是无关的，通常称**度量形式**，或 Hermite 度量.

根据上一节的结果，Hermite 流形 $M$，具有一自然的(1,0)型联

络，称为 Hermite 联络，由此可决定其相应的曲率：

(3.7.2) $\omega = \partial h \cdot h^{-1}$

(3.7.3) $\Omega = -(\partial\bar{\partial} h)h^{-1} + (\partial h)h^{-1} \wedge (\bar{\partial} h)h^{-1}.$

(3.7.4) $R^l_{ki\bar{j}} = -h^{l\bar{s}} \dfrac{\partial^2 h_{k\bar{s}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \dfrac{\partial h_{k\bar{s}}}{\partial z^i} \dfrac{\partial h_{q\bar{t}}}{\partial \bar{z}^j} h^{q\bar{s}} h^{l\bar{t}}$

(3.7.5) $R_{k\bar{l}i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 h_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - \dfrac{\partial h_{k\bar{s}}}{\partial z^i} \dfrac{\partial h_{t\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} h^{t\bar{s}}$

如果将联络形式 $\omega = (\omega_i^j)$ 写成（见(3.5.9)，此处略去和号）

(3.7.6) $\omega_i^j = \Gamma^j_{ik} dz^k,$

则由(3.7.2)得

(3.7.7) $\Gamma^j_{ik} = \dfrac{\partial h_{i\bar{l}}}{\partial z^k} h^{j\bar{l}}$

设 $M$ 是一 Hermite 流形，对于其 Hermite 度量，可以自然地定义一个实值(1,1)形式

(3.7.8) $\hat{H} = \dfrac{i}{2} \sum_{i,j} h_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}$

称为 $M$ 的 Kaehler 形式.

**定义 3.7.2** Hermite 流形 $M$ 称为 Kaehler 流形，如果其 Kaehler 形式是闭形的：

(3.7.9) $d\hat{H} = 0.$

**注**：Kaehler 条件(3.7.9)对于复流形而言是一个相当强的限制，它表明并不是每一个复流形都可具有 Kaehler 结构，象 Hopf — Calabi — Eckmann 流形：$S^{2p+1} \times S^{2q+1}, p \geq 0, q \geq 1$，就是一个不具有任何 *Kähler* 结构的复流形.

Kaehler 条件(3.7.9)有三种等价说法，这就是下面的

**定理 3.7.1** 对 Hermite 流形 $M$，下列三条件等价：

*i*) $d\hat{H} = 0$,

*ii*) $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$,

*iii*) 存在实值、局部 $C^\infty$ 的函数 $\Phi$，使

(3.7.10) $\qquad \hat{H} = i\partial\bar{\partial}\,\Phi.$

**证明** $i)\Leftrightarrow ii)$

$$d\hat{H} = 0 \Leftrightarrow \frac{i}{2} d\sum h_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial h_{k\bar{j}}}{\partial z^i}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$$

$iii)\Rightarrow i)$，显然

$i)\Rightarrow iii)$，因为 $\hat{H}$ 是实值的(1,1)闭形式，由 Poincare 引理，存在一局部的 1 形式 $G$，使

$$\hat{H} = dG.$$

将 $G$ 按(1,0)和(0,1)型分解，则 $G = G^{(1,0)} + G^{(0,1)}, \overline{G^{(1,0)}} = G^{(0,1)}$. 这时

$$\begin{aligned}\hat{H} &= dG = (\partial + \bar{\partial})(G^{(1,0)} + G^{(0,1)}) \\ &= \partial G^{(1,0)} + \bar{\partial}\,G^{(0,1)} + \partial G^{(0,1)} + \bar{\partial}\,G^{(1,0)},\end{aligned}$$

但 $\hat{H}$ 是(1,1)型的，因此

$$\partial G^{(1,0)} = \bar{\partial}\,G^{(0,1)} = 0.$$

再根据 Dolbeault − Gröthendick 引理，存在局部的 $C^\infty$ 函数 $F$，使 $G^{(0,1)} = \bar{\partial}\,F$. 因而 $G^{(1,0)} = \partial\bar{F}$，这时

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \bar{\partial}\,G^{(1,0)} + \partial G^{(0,1)} = \bar{\partial}\,\partial\bar{F} + \partial\bar{\partial}\,F \\ &= \partial\bar{\partial}\,(F - \bar{F}) = i\partial\bar{\partial}\,(\frac{F - \bar{F}}{i}) = i\partial\bar{\partial}\,\Phi,\end{aligned}$$

其中 $\Phi = (F - \bar{F})/i$ 是实值，局部 $C^\infty$ 的函数，定理证明. □

在 Kaehler 流形的研究中，下述定理是一个十分重要的定理，利用它可以简化许多问题的证明和计算.

**定理 3.7.2** 设 $M$ 是一 Kaehler 流形，其 Kaehler 结构为 $h = (h_{i\bar{j}})$，那末对任一点 $P \in M$，在 $P$ 附近可以选取局部坐标$(z^1, \cdots,$

$z^n$) 使 $z^i(P) = 0, i = 1, \cdots, n$,并且

(3.7.11) $$h(z) = I + 0(|z|^2).$$

这样的局部坐标系称为**正规坐标系**.

**证明** 只要经过线性变换,不妨设 $h_{i\bar{j}}(0) = \delta_{ij}$. 由此可展开

$$h_{i\bar{j}}(z) = \delta_{ij} + a_{i\bar{j}k}z^k + a_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{z}^k + 0(|z|^2),$$

因为 $h$ 是 Kaehler 的,

$$a_{i\bar{j}k} = \frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(0) = a_{k\bar{j}i},$$

又因 $\overline{h_{i\bar{j}}} = h_{j\bar{i}}$,故

$$a_{i\bar{j}\bar{k}} = \overline{a_{j\bar{i}k}}, a_{i\bar{j}\bar{k}} = a_{i\bar{k}\bar{j}},$$

作局部坐标变换

$$z^\mu = w^\mu + \frac{1}{2}\sum b^\mu_{ij}w^iw^j,$$

其中 $b^\mu_{ij} = b^\mu_{ji}$ 待定.

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}(w) = h_{\alpha\bar{\beta}}(z(w))\frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i}\frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial \bar{w}^j}$$

得

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}(w) = \delta_{ij} + \sum_k (a_{i\bar{j}k}w^k + b^j_{ki}w^k)$$
$$+ \sum_k (a_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{w}^k + \bar{b}^i_{kj}\bar{w}^k) + 0(|w|^2),$$

只要令 $b^j_{ki} = -a_{ei\bar{j}k} = -\frac{\partial h_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(0)$,就有 $\bar{b}^i_{kj} = -\overline{a_{j\bar{i}k}} = -a_{i\bar{j}\bar{k}}$,因而

$$\tilde{h}_{i\bar{j}}(w) = \delta_{ij} + 0(|w|^2).$$

定理证完. □

定理 3.7.2 表明,Kaehler 流形在任一点的局部和 $C^n$ 仅相差二阶无穷小,换言之,在正规坐标系下,可使

$$h_{i\bar{j}}(0) = \delta_{ij}, dh_{i\bar{j}}(0) = 0,$$
$$\partial h(0) = \bar{\partial} h(0) = \bar{\partial} h^{-1}(0) = \partial h^{-1}(0) = 0.$$

显然，如果Hermite流形 $M$ 的Hermite结构 $h$ 在任何一点的局部皆可表成

$$h_{i\bar{j}}(z)=\delta_{ij}+0(|z|^2),$$

那末

$$dh_{i\bar{j}}(0)=0,$$

这时 Hermite 流形 $M$ 自然就是 Kaehler 流形

由(3.7.3).在正规坐标系下曲率可以取极简单的形式

$$\Omega(0)=-\partial\bar{\partial}h(0). \tag{3.7.12}$$

因为 $\hat{H}=\frac{i}{2}\sum h_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha d\bar{z}^\beta=i\partial\bar{\partial}\Phi$，所以 $h_{\partial\bar{\beta}}=\partial_\alpha\bar{\partial}_\beta(2\Phi)$，在此 $\partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$，$\bar{\partial}_\beta=\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\beta}$，因此在正规坐标系下，Kaehler 流形的曲率张量可以写成

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(0)=\partial_\alpha\bar{\partial}_\beta\alpha_\gamma\bar{\partial}_\delta(2\Phi)(0). \tag{3.7.13}$$

因而，Kachler 张量有下列对称性：

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}=R_{\beta\bar{\alpha}\alpha\bar{\delta}\alpha\bar{\delta}}\gamma\bar{\beta}_R=R_{\gamma\bar{\delta}\alpha\bar{\beta}} \tag{3.7.14}$$

$$\overline{R}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}=R_{\beta\bar{\alpha}\delta\bar{\gamma}} \qquad (\text{见}(3.6.15)) \tag{3.7.15}$$

**定义 3.7.3**

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=R_{\alpha\bar{\beta}\mu\bar{\gamma}}h^{\mu\bar{\gamma}} \tag{3.7.16}$$

称为 Ricci 曲率张量.

关于 Ricci 曲率张量我们有下述

**定理 3.7.3**

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=\partial_\partial\bar{\partial}_\beta(\log deth). \tag{3.7.17}$$

**证明** 取正规坐标系，因为

$$h_{\alpha\bar{\beta}}(0)=h^{\alpha\bar{\beta}}(0)=\delta_{\alpha\beta},$$

$$R_{\alpha\bar{\beta}\mu\bar{\gamma}}(0)=R_{\mu\bar{\gamma}\alpha\bar{\beta}}(0)=\bar{\partial}_\beta((\partial_\alpha h_{\mu\bar{\sigma}})h^{\gamma\bar{\sigma}}(0).$$

所以

$$R_{\alpha\bar{\beta}}(0)=R_{\alpha\bar{\beta}\mu\bar{\gamma}}(0)^{\mu\bar{\gamma}}(0)=\sum_\mu R_{\alpha\bar{\beta}\mu\bar{\mu}}(0)$$

$$= \sum_{\mu,\sigma} \bar{\partial}_\beta((\partial_\alpha h_{\mu\bar{\sigma}})h^{\mu\delta})(0).$$

在 deth $= \det(h_{\mu\bar{\sigma}})$ 中，命 $h_{\mu\bar{\sigma}}$ 的代数余子式为 $A_{\mu\bar{\sigma}}$，则有

$$\text{deth} = \sum h_{\mu\bar{\sigma}} A_{\mu\bar{\sigma}}$$

故

$$\frac{\partial \text{det}h}{\partial h_{\mu\bar{\sigma}}} = A_{\mu\bar{\sigma}} = (\text{det}h)h^{\mu\bar{\sigma}} \text{（因为 } h^{\mu\bar{\sigma}} = \frac{A_\mu\bar{\sigma}}{\text{det}h}\text{）}$$

所以

$$\partial_\alpha \text{det}h = \sum_{\mu,\sigma} \frac{\partial \text{det}h}{\partial h_{\mu\bar{\sigma}}} \partial_\alpha h_{\mu\delta} = \sum_{\mu\bar{\sigma}} (\text{det}h) h^{\mu\bar{\sigma}} (\partial_\alpha h_{\mu\bar{\sigma}})$$

因此

$$\frac{1}{\text{det}h} \partial_\alpha \text{det}h = \sum_{\mu\sigma} (\partial_\alpha h_{\mu\bar{\sigma}}) h^{\mu\bar{\sigma}}$$

由此得到

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}}(0) &= \sum_{\mu\sigma} \bar{\partial}_\beta((\partial_\partial h_{\mu\bar{\sigma}})h^{\mu\bar{\sigma}})(0) \\ &= \bar{\partial}_\beta[\frac{1}{\text{det}h}\partial_\alpha(\text{det}h)]. \\ &= \partial_\partial \bar{\partial}_\beta(\log \text{det}h) \quad \square \end{aligned}$$

# 第三章　参考文献


陈省身，陈维桓[1983]

钟家庆[1983]

钟同德[1986]

R. M. Range[1986]

П. А. Айзенберг, А. п. южаков[1979]

# 第四章　多复变函数的积分表示与 $\bar{\partial}$ — 方程

熟知在单复变函数论中，有三个主要方法即：Cauchy 积分公式，Laplace 方程和幂级数方法. 按理在多复变函数论中也相应有这三个方法，但在多复变数的情形，情况有所不同，就 Cauchy 积分公式来说，在 § 1. 1. 14 我们介绍广义多圆柱的 Cauchy 积分公式时就已经指出，多圆柱域上全纯函数的数值已不必由全部边界上的数值决定，只要由边界的一部分即所谓特征流形上的数值就可决定多圆柱域上全纯函数的数值. 此外我们已多次指出单复变数中的 Riemann 映射基本定理在多复变数中已不再成立，也就是在多复变数空间中并非任何两区域都是全纯等价，例如在 $C^n$ 空间中多圆柱和超球这两个十分标准的单叶单连通区域就不是解析等价的，而且多复变数空间中域的分类问题至今仍未解决，圆柱域在多复变空间中的代表性也远远不如单位圆在单复变数的情形，因此有必要讨论各种不同区域的全纯函数的积分表示. 我们首先介绍 Bochner — Martinelli 积分表示，然后介绍一类相当一般的积分表示即 Cauchy — Fantapooiè 公式，由此推出凸区域上的积分表示和 Bergman — Weil 积分表示. 此外介绍了外微分式的积分表示（Leray — Koppelman 公式）. 原来这些积分表示公式都有它自己的独特证明方法，可以从许多著作，例如 Б. А. Фукс[1962]，П. А. АйзЕнберг，А. п. южаковь[1979]，钟同德[1986]中找到，对于初学者通过这些独特的证明可以得到许多启发，本书与上述著作略有不同，一方面着重说明这些公式之间的相互关系，例如说明 Bochner

— Martinelli 公式和 Cauchy — Fantappiè 公式在证明方法之间的关系，特别是指出如何从 Cauchy — Fantappiè 公式推出 Bochner — Martinelli 公式，凸区域上的积分表示和 Bergman — Weil 积分表示等；另一方面我们尽量介绍一些迄今未见诸著作中的新的简洁的证明方法.

相应于单复变数中 Laplace 方程的研究，本章介绍了强拟凸域上 $\bar\partial$ — 方程的解的积分表示理论，但多复变数中的 $\bar\partial$ — 方程和单复变数中的 Laplace 方程有本质的区别，前者是一个超定方程，本世纪 60 年代以前，K. Oka，H. Cartan，J. P. Serre，H. Grauert 等人运用交换代数和层论等抽象方法解决了著名的 Cousin 问题和 Levi 问题以后，60 年代初 J. J. Kohn 和 L. Hörmander 用偏微分方程方法得到 $\bar\partial$ — Neumann 问题的解，由此非常明确和简洁地解决了 Cousin 问题和 Levi 问题，从此开始了多重变数和分析的联系. 1970 年 G. M. Henkin 和 Grauert — Lieb 等又得到了 $\bar\partial$ — 方程的解的积分表示，从此在多变数中开始了运用积分表示的工具发展多复变数的大范围理论的新时期，70 年代后的二十几年来，积分表示方法在多复变数中得到广泛的应用和蓬勃发展.

熟知 Stein 流形是一种重要的复流形，多复变数空间 $C^n$ 是其特例 Stein 流形上有足够多的全纯函数，所以研究 Stein 流形上的多元复变函数论是很有普遍意义的，本章最后讨论了 Stein 流形上多复变函数的积分表示理论和 $\bar\partial$ — 方程的解的积分表示

## § 4.1 Bochner-Martinelli 积分表示

**定理 4.1.1** (Bochner-Martinelli) 设函数 $f \in A_c(D)$，其中 $D$ 是 $C^n$ 中的有界域，具有逐块光滑边界 $\partial D$，那么下面的 Bochner-Martinelli 公式成立.

$$(4.1.1)\qquad \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) = \begin{cases} f(z), z \in D \\ 0, z \overline{\in} \overline{D} \end{cases}$$

其中

(4.1.2)

$$\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}},$$

积分定向的选择是使形式 $(-i)^n d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$ 是正的.

**证明** 任取一固定点 $z \in D$,显然在集合 $C^n \backslash \{z\}$ 上有 $\partial_\zeta \omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) = 0$,而且有

$$\begin{aligned}
&\partial_\zeta \omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) = \\
&= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}(-n)(|\zeta - z|^2)^{-n-1} \sum_{i=1}^{n} (\zeta_j - z_j)d\overline{\zeta}_j \wedge \\
&\qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-)^{k-1} d\overline{\zeta}_k \wedge d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta \\
&= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}}(-n d\overline{\zeta} \wedge d\zeta + n d\overline{\zeta} \wedge d\zeta) = 0.
\end{aligned}$$

因此 $\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z})$ 在 $C^n \backslash \{z\}$ 上关于 $\zeta$ 是一闭形式.

因 $f(\zeta) \in A_c(D)$,所以有 $\overline{\partial} f(\zeta) = 0$,又显然有 $d\zeta_i \wedge \omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) = 0$,因此有

$$\begin{aligned}
&d[f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z})] \\
&= \partial[f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z})] + \overline{\partial}[f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta_j} d\zeta_j \wedge \omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) + f(\zeta)\partial\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) \\
&\quad + \overline{\partial} f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) + f(\zeta)\overline{\partial}\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

即 $f(\zeta)\omega(\zeta - z,\overline{\zeta} - \overline{z})$ 在 $D\backslash\{z\}$ 上关于 $\zeta$ 也是一闭形式.

所以当 $z \overline{\in} \overline{D}$ 时,由推论 3.1.3 可知(4.1.1)成立.

当 $z\in D$ 时，以 $z$ 为心，以充分小正数 $\varepsilon$ 为半径作超球 $B_\varepsilon(z,\varepsilon)\subset D$，在 $D\backslash B_\varepsilon$ 上利用 Stokes 公式得到

$$\int_{\partial D\backslash\partial B_\varepsilon} f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z}) = \int_{D\backslash B_\varepsilon} d[f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})] = 0.$$

即我们有

$$(4.1.3)\qquad \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z}) = \int_{\partial B_\varepsilon} f(\zeta)\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$$
$$= f(z)\int_{\partial B_\varepsilon}\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$$
$$+\int_{\partial B_\varepsilon}[f(\zeta)-f(z)]\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z}).$$

由于

$$\int_{\partial B_\varepsilon}\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})$$
$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon}(-1)^{k-1}(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)d\bar{\zeta}_{[k]}\wedge d\zeta$$
$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\int_{B_\varepsilon}(-1)^{k-1}d\bar{\zeta}_k\wedge d\bar{\zeta}_{[k]}\wedge d\zeta$$
$$=\frac{n!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{B_\varepsilon}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta$$
$$=\frac{n!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}(2i)^n\int_{B_\varepsilon}d\xi\wedge d\eta\quad(\text{命 }\zeta=\xi+i\eta,\bar{\zeta}=\xi-i\eta)$$
$$=\frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}V_0 1.B_\varepsilon=1.$$

又

$$\int_{\partial B_\varepsilon}|\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})|$$
$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon}|(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)d\bar{\zeta}_{[k]}\wedge d\zeta|$$
$$\leqslant\frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon}|d\bar{\zeta}_{[k]}\wedge\zeta|\leqslant M,$$

其中 $M$ 为常数，又因为 $f(\zeta)$ 在点 $z$ 连续，故有

$$\sup_{|\zeta - z| = \varepsilon} |f(\zeta) - f(z)| \to 0, \text{当 } \varepsilon \to 0.$$

所以

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} [f(\zeta) - f(z)]\omega(\zeta - z, \overline{\zeta} - \overline{z})\right|$$

$$\leqslant M \sup_{|\zeta - z| = \varepsilon} |f(\zeta) - f(z)| \to 0, \text{当 } \varepsilon \to 0,$$

因此，在(4.1.3)式的两端，令 $\varepsilon \to 0$ 取极限即知当 $z \in D$ 时，(4.4.1)式也成立. □

Bochner Martinelli 积分表示最早是 S. Bochner[1943] 和 E. Martinelli[1942][1943] 提出来的（参阅 R. Fueter[1939], E. Martinelli[$1953_a$][$1953_b$]).

Bochner-Martinelli 积分表示的证明方法很多，除上述外还可参阅 S. Bochner[1943], п. A. Айзенберг, A. п. Южаков[1979] 第28—29 页，B. C. B$_\Lambda$адимиров[1964] 第 237—239 页.

Bochner—Martinelli 积分表示是一个复变数的 Canchy 积分公式的一种推广，然而当 $n > 1$ 时有一特别的地方就是被积函数明显地包含 $\overline{z}_k$ 而积分的结果却与 $\overline{z}_k$ 无关. 或者说和一个复变数的 Cauchy 核不同，$B$-$M$ 核 $\omega(\zeta - z, \overline{\zeta} - \overline{z})$ 当 $n > 1$ 时关于 $z$ 不是全纯的，而只是 $z$ 的复调和函数.

## § 4.2 Cauchy-Fantappiè 公式

对 $C^n$ 中有界域 $D$ 的全纯函数 $f \in A_c(D)$ 我们有下面的非常普遍积分表示公式.

**定理 4.2.1**(Leray) 设 $D$ 是 $C^n$ 中具有逐块光滑边界的有界域，如果向量函数 $u \in C^{(1)}(\partial D)$ 且 $< u(\zeta, z), \zeta - z > \neq 0$，其中 $\zeta \in \partial D$, $z \in D$，那末所有的函数 $f \in A_c(D)$ 都可表成 Cauchy-Fantappiè 公式

(4.2.1) $$\int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - z, u) = f(z), z \in D$$

其中

(4.2.2) $$\omega(\zeta - z, u) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k du_{[k]} \wedge d\zeta}{< u, \zeta - z >^n}.$$

**证明**　由于 *Bochner-Martinelli* 公式

(4.2.3) $$\int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = f(z), z \in D$$

其中

(4.2.4)

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}$$

和 Cauchy-Fantappiè 公式(4.2.1)是同一外微分式

(4.2.5) $$f(\zeta) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k dv_{[k]} \wedge d\zeta$$

分别在循环

(4.2.6) $$\gamma_0 = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, v_k = v_k^0 = \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^2}, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

和

$$\gamma = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, v = v' = \frac{u}{\langle u, \zeta - z \rangle}\}$$

上的积分　$\gamma_0, \gamma$ 在 $C^{2n}_{\zeta, v}$ 的曲面

(4.2.8) $$M_z = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, \langle v, \zeta - z \rangle = 1\}$$

上.

由于形式(4.2.5)在 $M_z$ 上是闭的,这是因为 $M_z$ 上 $d\zeta_1, \cdots, d\zeta_n$, $du_1, \cdots, du_n$ 中只有 $2n-1$ 个独立微分,而形式(4.2.5)却有极大维数 $2n-1$,因此它是闭的,所以根据推论 3.1.3 要证明 Cauchy-Fantappiè 公式等于 Bochner-Martinelli 公式,只要证明循环 $\gamma_0$ 和 $\gamma$ 在 $M_z$ 上是同调的,考虑集合

(4.2.9) $$Q = \{(\zeta, v) : \zeta \in \partial D, v = \lambda v^0 + (1-\lambda) v', 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

显然

$$\gamma - \gamma_0 = \partial Q,$$

因为当 $\lambda = 0$ 时, $Q = v'$, 当 $\lambda = 1$ 时 $Q = v^0$, 再者

$$\langle \lambda v^0 + (1-\lambda) v', \zeta - z \rangle = \lambda \langle v^0, \zeta - z \rangle + (1-\lambda)\langle v', \zeta - z \rangle$$
$$= 1,$$

即 $Q \subset M_z$. 因此 $\gamma_0$ 和 $\gamma$ 在 $M_z$ 上同调. □

现在将公式(4.2.1)给予更抽象的形式. 固定点 $z \in D$, 并在复变量 $(\zeta, v)$ 空间 $C^{2n}_{\zeta,v}$ 中考虑曲面 $M_z = \{(\zeta, v): \langle v, \zeta - z \rangle = 1, \zeta \in \partial D\}$.

**推论 4.2.1** (Leray) 设向量函数 $v(\zeta, z), \zeta \in \partial D, z \in D$, 关于 $\zeta$ 属于 $C^{(1)}(\partial D)$ 类并且满足条件

(4.2.10) $\langle v, \zeta - z \rangle = 1, \zeta \in \partial D, z \in D.$

以 $\alpha$ 表示 $M_z$ 上的循环, 它由点 $(\zeta, v)$ 当 $\zeta$ 跑遍 $\partial D$ 时描绘而成. 循环 $\alpha$ 包含在某一类 $h \in H_{2n-1}(M_z)$ 中, 对任意的函数 $f \in A_c(D)$ 和任意的循环 $\beta \in h$ 有 Cauchy-Fantappiè 公式

(4.2.11) $$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_\beta f(\zeta) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k dv_{[k]} \wedge d\zeta. \quad z \in D.$$

应当指出 Cauchy-Fantapiè 公式不是对于函数 $f \in A_c(D)$ 的单个积分表示, 而是这种积分表示的一个集合, 它依赖于向量值函数 $u$ 的选择.

以下我们通过适当选择向量值函数 $u$ 和积分循环 $\beta$ 得到各种不同区域上的全纯函数的积分表示公式.

显然 Bochner-Martinelli 公式(4.2.3) 可以由 Cauchy-Fantappiè 公式(4.2.1) 取 $u = \bar{\zeta} - \bar{z}$ 得到.

## § 4.3 凸区域的积分表示

**定义 4.3.1** 区域 $D = \{z: \rho(z, \bar{z}) < 0\}$ 称为**正则线性凸**区域,

如果实函数 $\rho$ 在 $\overline{D}$ 的一个邻域上属于 $C^{(2)}$ 类，在 $\partial D$ 上，$\mathrm{grad}\rho \neq 0$，并且对每一点 $\zeta \in \partial D$，解析切平面 $\{z: \langle z - \zeta, grad\rho(\zeta)\rangle = 0\}$ 不与 $D$ 相交.

**定理 4.3.1** 设区域 $D = \{z: \rho(z,\overline{z}) < 0\}$ 是一正则线性凸区域，那末对于 $f \in A_c(D)$ 有积分表示

(4.3.1)

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\sum_{k=1}^{n}\delta_k d\overline{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n}, z \in D,$$

其中

$$\delta_k = \begin{vmatrix} \rho'_{\zeta_1} & \cdots & \rho'_{\zeta_n} \\ \rho''_{\zeta_1\overline{\zeta}_1} & \cdots & \rho''_{\zeta_n\overline{\zeta}} \\ \cdots & [k] & \cdots \\ \rho''_{\zeta_1\overline{\zeta}_n} & \cdots & \rho''_{\zeta_n\overline{\zeta}_n} \end{vmatrix}, k = 1, \cdots, n.$$

**证明** 只要将 Cauchy-Fantappiè 公式(4.2.1) 中的向量值函数 $u$ 取成 $\mathrm{grad}\rho$ 就可得到. □

在(4.3.1) 中象在 $n = 1$ 时的 Cauchy 公式一样，变量 $z$ 只在核的分母中出现，并且分母是 $z$ 的线性函数的 $n$ 次方，核的这种漂亮结构使得公式(4.3.1) 应用起来十分方便.

## §4.4 Bergman-Weil 公式

在介绍这个公式之前，我们先介绍如何应用 Cauchy-Fantappiè 公式(4.2.11) 来推出广义多圆柱的 Cauchy 公式：

**定理 1.1.2** 设 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ 为一广义多圆柱域，$f \in A_c(D)$，则有

(4.4.1) $$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, z \in D = D_1 \times \cdots \times D_n,$$

其中特征流形 $\Gamma = \partial D_1 \times \cdots \times \partial D_n$.（参考公式(1.1.10)）.

**证明**　只要适当的选择积分循环 $\beta$ 和向量函数 $v$. 为此将边界 $\partial D$ 表成形式 $\bigcup_1^n\gamma_i$，其中 $\gamma_i=\{z:z\in\overline{D},z_i\in\partial D_i\}$. 在每一面 $\gamma_i$ 考虑向量值函数 $v^{(i)}=(v_1^{(i)},\cdots,v_n^{(i)})$，其中 $v_k^{(i)}=\delta_{ik}(\zeta_i-z_i)^{-1},i,k=1,\cdots,n$. 显然，$v^{(i)}$ 满足条件(4.2.10). 现在考虑 $C^{2n}$ 中的定向曲面 $\beta_i=\{(\zeta,v^{(i)}),\zeta\in\gamma_i\}$. 并集 $\bigcup_1^n\beta_i$ 不是一个循环，因为每一面 $\gamma_i$ 都有它自己的向量值函数 $v^{(i)}$. 但是 $\partial D$ 是一循环，又集合 $\{(\zeta,v),z\in\partial D\}$ 也是一循环，如果 $v$ 对 $\zeta\in\partial D$ 是连续的. 集合 $\bigcup_1^n\beta_i$ 有"空洞"，它位于诸面 $\gamma_i$ 相交的点上，也就是在棱边上. 我们用如下方法"填塞"这些"空洞"：如果 $k$ 个面 $\gamma_{i_1},\cdots,\gamma_{i_k}$ 交于棱边 $\gamma_{i_1\cdots i_k}$，那末我们构造集合

$$\beta_{i_1\cdots i_k}=\{(\zeta,v):\zeta\in\gamma_{i_1\cdots i_k},\ v=\sum_{l=1}^k\lambda_l v^{(i_l)},\lambda_l\geqslant 0,\ \sum_{l=1}^k\lambda_l=1\}.$$

将所有曲面 $\beta_{i_1\cdots i_k}$ 加到 $\bigcup_1^n\beta_i$ 中去；由此得到的(定向)曲面 $\beta$ 就是一循环.

应用(4.2.11)到 $\beta$. 由于所有 $v^{(i)}$ 对 $\zeta$ 全纯；所以 $dv_{[k]}^{(i)}\wedge d\zeta=0,i,k=1,\cdots n$，因此(4.2.11)中在每一 $\beta_i$ 上的积分都等于零，如果 $k<n$，那末所有的 $dv_{[j]}\wedge d\zeta$ 在 $\beta_{i_1\cdots i_k}$ 上都是 0，由于 $v$ 全纯依赖于 $\zeta$ 和 $k-1$ 个独立参数，也就是总共有 $n+k-1<2n-1$ 个独立微分. 所以(4.2.11)中在 $\beta_{i_1\cdots i_k}$ 上的积分也等于零，剩下是要计算在 $\beta_{i_1\cdots i_n}$ 上的积分. 在 $\Gamma=\gamma_{1\cdots n}$ 上向量值函数 $v$ 的分量 $v_k$ 具形式

$$v_k=\sum_{l=1}^n\lambda_l v_k^l=\frac{\lambda_k}{\zeta_k-a_k},k=1,\cdots,n.$$

因此

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\beta_{1\cdots n}}f(\zeta)\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}v_k dv_{[k]}\wedge d\zeta$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}\int_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1\\ \lambda_i\geqslant 0}}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\lambda_k d\lambda_{[k]}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

其中我们应用了等式

$$(4.4.2)\qquad \int_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1\\ \lambda_i\geqslant 0}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\lambda_k d\lambda_{[k]}=\frac{1}{(n-1)!}$$

要证明(4.4.2)只要注意到，应用Stokes公式，(4.4.2)的左端等于

$$n\int_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n\leqslant 1,\lambda_i\geqslant 0}d\lambda=n\cdot\frac{1}{n!}.\qquad\square$$

**定义** 4.4.1(Weil 多面体). 假设函数 $\chi_1(z),\cdots,\chi_n(z),N\geqslant n$，在区域 $D\subset C^n$ 上是全纯的，又 $D_1,\cdots,D_N$ 为平面区域，使得 $D_i\subset\chi_i(D),i=1,\cdots,N$. 集合 $\triangle=\{z:z\in D,\chi_i(z)\in D_i,i=1,\cdots,N\}$ 称为**解析多面体**(参考定义 2.2.3). 解析多面体的一个联结分量称为 Weil **多面体**，如果边界 $\partial D_i$ 是逐块光滑的，并且 $k$ 个面 $\gamma_i=\{z:z\in D,\chi_i\in\partial D_i,\chi_j\in D_j,i\neq j\}$ 的交，维数最多是 $2n-k$(使得这些面交于一般位置). 命 $\gamma_{i_1\cdots i_n}=\bigcap_{k=1}^{n}\gamma_{i_k}$. 这些 $n$ 维棱边的自然定向由面 $\gamma_{i_1}$，$\cdots,\gamma_{i_n}$ 的次序决定. 所有这样的 $n$ 维棱边的并集称为多面体 $\triangle$ 的**特征流形**. $\sigma=\bigcup_{i_1<\cdots<i_n}\gamma_{i_1\cdots i_n}$.

特别，当 $N=n$ 和 $\chi_i=z_i,i=1,\cdots,n$, Weil 多面体就是广义多圆柱域.

**定理 4.4.1**(Hefer) 设 $D_z$ 是复变量 $z_1,\cdots,z_n$ 空间 $C_z^n$ 中的全纯域，$D_\zeta$ 是复变量 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 空间 $C_\zeta^n$ 中与它恒等的区域，那末在区域 $D_z$ 上全纯的任何一个函数 $Z(z)$，在区域 $D_\zeta\times D_z\subset C_\zeta^n\times C_z^n$ 都对应一组全纯函数：

$$P_1(\zeta,z),\cdots,P_n(\zeta,z)$$

使得

$$(4.4.3)\qquad Z(\zeta)-Z(z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)P_k(\zeta,z).$$

这个定理所表述的内容称为**除法问题**，是 H. Hefer[1950] 在 1942年证明的. 注意，如果函数 $Z(z)$ 是多项式(这时区域 $D_\zeta\times D_z$ 可

取为空间 $C^n_\zeta \times C^n_z$ 中的任何有限区域)，这个定理是显然的，这时要得到函数 $P_k(\zeta,z)$ 只要按 Taylor 公式展开差 $Z(\zeta) - Z(z)$. 我们把展开式中所有包含 $\zeta_1 - z_1$，及其各次幂项集中在一起，将 $\zeta_1 - z_1$ 的系数记为 $P_1(\zeta,z)$. 然后将包含 $\zeta_2 - z_2$ 及其各次幂项集中在一起. 将 $\zeta_2 - z_2$ 的系数记为 $P_2(\zeta,z)$. 如果继续进行，我们得到关系式(4.4.3). 在一般的情形，定理并非显然的.

注意，函数 $P_k(\zeta,z)$ 一般来说，不是由已知函数唯一决定的，对每一个函数(4.4.3)的表示做成一个集合. 对多项式的情形是显然的. 在后面第六章的 6.5.3 段我们将介绍除法问题的一个层论解法.

由 Hefer 定理

$$\chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j), i = 1,\cdots,N.$$

命 $\Omega_{i_1\cdots i_n}$ 表示行列式 $det\|q_{ij}\|, i = i_1,\cdots,i_n, j = 1,\cdots,n.$

**定理 4.4.2**(*Weil*)　命 $\triangle$ 为一 Weil 多面体，又命 $f \in A_c(\triangle)$. 那末对 $z \in \triangle$

$$(4.4.4)\quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1<\cdots<i_n}\int_{\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_n}}\frac{f(\zeta)\Omega_{i_1\cdots i_n}(\zeta,z)d\zeta}{\prod_{k=1}^{n}[\chi_{i_k}(\zeta) - \chi_{i_k}(z)]}.$$

**注**:这个公式称为 Bergman-Weil **积分表示**. 它是广义多圆柱域上 Cauchy 积分公式的拓扩，因为当 $N = n, \chi_i = z_i, i = 1,\cdots,n$ 时，(4.4.4)就变为广义多圆柱域上的 Cauchy 积分公式. 公式(4.4.4)由全纯函数 $f$ 在 $n$ 维特征流形 $\sigma$ 上的数值决定它在 $\triangle$ 上的数值，并且公式(4.4.4)有一关于 $z$ 全纯的核；而且这个核依赖于区域的形状.

**证明**:总的来说，公式的证明是上述广义多圆柱上 Cauchy 积分公式的重复，在每一面 $\gamma_i$ 上我们考虑向量值函数.

$$v^i = (v_1^i,\cdots,v_n^i), \text{其中 } v_k^i = q_{ik}\Big[\sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j)\Big]^{-1},$$

并在每一棱边 $\gamma_{i_1\cdots i_n}$ 上我们考虑集合 $\beta_{i_1\cdots i_n} = \{(z,v):\zeta \in \gamma_{i_1\cdots i_n}, v =$

$\sum_1^n \lambda_l v^{i_l}, \lambda_l \geqslant 0, \sum_1^n \lambda_l = 1\}$. 和本节开头所述广义多圆柱域上 Cauchy 积分公式的证明一样，我们有

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \cdots < i_n} \int_{\beta_{i_1 \cdots i_n}} f(\zeta) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k dv_{[k]} \wedge d\zeta$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \cdots < i_n} \int_{\gamma_{i_1 \cdots i_n}} \frac{f(\zeta) \Omega_{i_1 \cdots i_n}(\zeta, z) d\zeta}{\prod_{k=1}^n [\chi_{i_k}(\zeta) - \chi_{i_k}(z)]}$$

$$\times \int_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \lambda_k d\lambda_{[k]}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 < \cdots < i_n} \int_{\gamma_{i_1 \cdots i_n}} \frac{f(\zeta) \Omega_{i_1 \cdots i_n}(\zeta, z) d\zeta}{\prod_{k=1}^n [\chi_{i_k}(\zeta) - \chi_{i_k}(z)]}$$

为简单计我们只计算 $n = 2$ 的情形：

$$\int_{\beta_{i_1 i_2}} f(\zeta)(v_1 dv_2 - v_2 dv_1) \wedge d\zeta$$

$$= \int_0^1 d\lambda_1 \int_{\gamma_{i_1 i_2}} f(\zeta)[(\lambda_1 v_1^{i_1} + (1-\lambda_1) v_1^{i_2})(v_2^{i_1} - v_2^{i_2})$$

$$- (\lambda_1 v_2^{i_1} + (1-\lambda_1) v_2^{i_2})(v_1^{i_1} - v_1^{i_2})] d\zeta$$

$$= \int_0^1 d\lambda \int_{\gamma_{i_1 i_2}} f(\zeta)(-v_1^{i_1} v_2^{i_2} + v_1^{i_2} v_2^{i_1}) d\zeta$$

$$= \int_{\gamma_{i_1 i_2}} \frac{f(\zeta) \Omega_{i_1 i_2}(\zeta, z) d\zeta}{\prod_{k=1}^2 (\chi_{i_k}(\zeta) - \chi_{i_k}(z))}. \qquad \square$$

## § 4.5 多复变全纯函数的统一 Cauchy 公式问题

多复变函数论中有很多种形式的 Cauchy 公式，F. Norguet 在他的论文 F. Norguet[19616] 的附录中，列举出研究多复变数 Cauchy 公式的论文就有 66 篇之多，然而他说这只是主要的文献，

非主要的还没有包括在内，他把主要的 Cauchy 公式分为五大类*：

1)A. Weil-S. Bergman 的 Cauchy 公式.

2)Bochner-Martinelli 的 Cauchy 公式.

3) 四类典型域的 Cauchy 公式.

4)Айзенберг 与 Темпяков 的 Cauchy 公式.

5)Cauchy-Fantappiè 公式.

这些不同的 Cauchy 公式是由于从不同的角度来看单复变数的 Cauchy 公式，而从不同的观点推广来的，当然其中有些公式的证明已经比原来的证明大大简化或者已采用了别的证明方法. 单复变数的 Cauchy 公式可以有下面几个方法来证明（陆启铿[1964]）：

1°. 因为$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$是 $D\backslash\{z\}$ 中的闭外微分形式，即

$$d\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right] = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right]d\zeta \wedge d\zeta + \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right]d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$
$$= 0$$

于是 Cauchy 公式可以从 Stokes 公式（在二维的情形也叫 Green 公式）推出. 此即，命 $B_\varepsilon$ 为以 $z$ 为中心，$\varepsilon$ 为半径的圆（$\varepsilon$ 是充分小正数），其圆周为 $\partial B_\varepsilon$，则由 Stokes 公式知

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{D\backslash B_\varepsilon} d\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right] + \int_{\partial B_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{f(z) + (\zeta - z)R(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i f(z),$$

其中 $R(\zeta)$ 是 $\zeta$ 的全纯函数. 由于 Stokes 公式在高维空间仍然成立，因此对于某些几何形状的多复变数空间的域，可以适当构造一外微分形式而得出 Cauchy 公式，例如 A. Weil[1935]，S. Bochner[1943]，E. Martinelli[1953]，П. А. Айзенъерг 等人的积分公

* 其实 F. Norguet[19616] 把主要的 Cauchy 公式除 Cauchy-Fantappiè 公式外分为四大类.

式.

2°. 对于单位圆的 Cauchy 公式(这时 $\partial D=\{|z|=1\}$),我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}d\theta$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta\right)z^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m=f(z),$$

$$a_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta.$$

对于多复变数空间适合某一些几何条件的域,S. Bergman[1934],华罗庚[1958]构造其对全纯函数是完备的正交函数系,由此得出 Cauchy 核和 Cauchy 公式.

3°. 单复变函数论中 Cauchy 的经典证明是把 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 看作是在 $D$ 域中的亚纯函数,在 $z$ 有简单的极点,而 Cauchy 公式即在此点的亚纯函数的残数,故有

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z).$$

但对多复变数函数什么叫残数呢?第一,在高维空间中何谓绕极点走一周?第二,多复变数亚纯函数的极点并非孤立的,而是成一解析集合,何谓绕某一个极点? J. Leray[1959] 清楚地,至少在极点成一流形的情况,定义了多复变数的残数(精确的说应该是残式)的概念,作为应用,他在很广的条件下得出一种多复变数的 Cauchy 公式,即所谓 Cauchy-Fantappiè 公式,在 §4.2 中介绍的 Г. M. Хенкин 给出的证明.

单复变数的 Cauchy 公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{4.5.1}$$

其中函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 全纯在闭区域 $\overline{D}$ 连续,$\partial D$ 由有限根闭 Jordan 曲线组成,在研究单复变全纯函数时起了非常重要的作用,原因是这个公式具有以下两个重要性质:1) 公式(4.5.1)是普遍的,即对任何区域 $D$ 都有相同的形式;2) Cauchy 核 $\frac{1}{\zeta - z}$ 对 $z$ 是全纯的(这就是保证了 Cauchy 型积分等等的全纯性).

但以上所推广的多复变数的 Cauchy 积分公式都不同时具备以上两个性质,例如:$a$)Bochner-Martinelli 公式是普遍的,但它的核不是全纯的;$b$)Weil,Bergman,华罗庚,Айзенберг 和 Темляков 的积分表示不是普遍的,但核是全纯的.

多复变数有这许多种形式的 Cauchy 公式,自然地产生这样的问题:它们之间彼此的关系如何?能否统一的处理?这就是多复变数的 Cauchy 公式的统一理论问题,最初考虑的是 F. Sommer[1952],他从 Bochner-Martinelli 的 Cauchy 公式 2) 推出 A. Weil 的 Cauchy 公式 1);(参考钟同德[1986]§2.3);其后 F. Nouguet[1960] 便从 Cauchy-Fantappiè 公式推出 A. Weil 的 Cauchy 公式 1)(见 §4.4)与 Bochner-Martinelli 公式 2)(见 §4.2),并且容易证明 Айзенърг 的 Cauchy 公式仅仅是 F. Norguet 的一个结果的特殊情形(见 F. Norguet[1961$a$] 定理 18.2);陆启铿[1966])又证明四类典型域的 Cauchy 公式 3) 也可以从 Cauchy-Fantappiè 公式推出. 从此 F. Norguet 所列举的多复变数的主要 Cauchy 公式都可统一起来.

## §4.6 强拟凸域上 $\bar{\partial}$ — 方程的解的积分表示

### 4.6.1 $\bar{\partial}$ — 方程

设 $D \subset C^n$ 是一域,$g = \sum g_k d\bar{z}_k$ 是定义于 $D$ 的 $C^{(\infty)}(\overline{D})$,(0,1)形式,即 $g \in C^{(\infty)}_{(0,1)}(\overline{D})$,并满足 $\bar{\partial} g = 0$,$\bar{\partial}$ — Neumann 问题是说,在何种

条件下

(4.6.1) $$\bar{\partial} u = g$$

有解?解 $u$ 是否在 $C^{(\infty)}(\overline{D})$ 中?

当域 $D$ 是强拟凸时方程是有解的,它的解法有两种,一种是由 L. Hörmander 和 J. J. Kohn 所发展的 $L^2$ 估计(参考 L. Hörmander [1965][1966], J. J. Kohn[1963][1964], G. B. Folland &J. J. Kohn[1972]),另一种是由 Г. M. Хенкин[1969][1970]和 H. Grauert & I. Lieb(参考 H. Granert & Lieb[1970], I. Lieb [1970] [1972])所发展的 $L^\infty$ 估计. 下面我们将详细介绍 $L^\infty$ 估计方法(肖荫堂[1979],Г. M. Хенкин[1969][1970]).

### 4.6.2 单复变量的情形

我们先介绍下面熟知的 Cauchy-Green 公式:

**定理** 4.6.1 (Cauchy-Green) 设 $D$ 为复数平面 $C^1$ 上由简单可求长闭曲线 $\partial D$ 围成的有界域,又复值函数 $f \in C^\infty(\overline{D})$,则对 $\forall\ z \in D$,有

(4.6.2) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right).$$

**证明** 命

(4.6.3) $$K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

这个(1,0)形式是 $C^1$ 上有界域的 Cauchy 核,易知

$$d(f(\zeta)k(\zeta,z)) = d\left(\frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

命 $B_\varepsilon$ 表示以 $z$ 为中心,以充份小的 $\varepsilon > 0$ 为半径的圆盘,在 $D \backslash B_\varepsilon$ 上对 $d(f(\zeta)k(\zeta,z))$ 应用 Stokes 公式有

(4.6.4) $$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{D\backslash B_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}f(z)\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta.$$

易知

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i,$$

又由于 $f(\zeta)$ 在点 $z$ 连续，故对给定的 $\delta > 0$，可取 $\varepsilon > 0$ 充份小，使得当 $|\zeta - z| < \varepsilon$ 时，$|f(\zeta) - f(z)| < \delta$，因此

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leqslant \sup|f(\zeta) - f(z)|\left|\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta\right|$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi\delta,$$

故当 $\varepsilon \to 0$ 时，(4.6.4) 右端第二个积分

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta \to 0.$$

所以将(4.6.4) 对 $\varepsilon$ 取极限，即知公式(4.6.2) 成立. □

当 $f(\varepsilon)$ 在 $D$ 内全纯时，$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = 0$，这时(4.6.2) 式即通常的 Cauchy 积分公式.

利用上述 Cauchy-Green 公式即可得到复数平面上 $\bar{\partial}$ — 方程的解.

在公式(4.6.2) 中命 $g = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta}$，则立知有 $\bar{\partial}g = 0$，将(4.6.2) 式两端进行 $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$ 运算，由于右端第一项对 $z$ 是全纯的，立得

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right)d\bar{z} = g(z), \forall\ z \in D.$$

换言之

$$u = -\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

就是 $\bar{\partial}$ — 方程的解. 而且有一致估计($L^\infty$ 估计)

(4.6.5) $\|u\|_{L^\infty} \leqslant c\|g\|_{L^\infty}$，$c$ 为不依赖于 $g$ 的常数，

在此

(4.6.6) $$\|\cdot\|_{L^\infty} = \max_{\overline{D}}\|\cdot\|,$$

这由

$$\left|\int_D \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right| < M, \forall\, z \in D, M: \text{常数},$$

立即知道.

#### 4.6.3 光滑函数的 Bochner-Martinelli 公式

现在我们对上一段单复变量的情形解 $\bar{\partial}$－方程的过程进行分析以便对解多复变量的 $\bar{\partial}$－方程有所借鉴.

单复变量的 $\bar{\partial}$－方程的解 $u$ 是通过 Cauchy 核 $K(\zeta,z)$ 的积分表示出来的，其所以能得到这个解，是因为核 $K(\zeta,z)$ 满足以下条件：

i) 核 $K(\zeta,z)$ 是 $\bar{\partial}$ 闭的 $(1,0)$ 形式，即 $\bar{\partial}K(\zeta,z) = 0$，

ii) 核 $K(\zeta,z)$ 当 $\zeta = z$ 时，奇点的阶是合适的，即

$$\int_D |K(\zeta,z) \wedge d\bar{\zeta}| < +\infty,$$

iii) $\int_{\partial B_\varepsilon} K(\zeta,z)$ 可以计算，

iv) $K(\zeta,z)$ 对 $z$ 全纯.

条件 i)—iii) 是保证 Cauchy-Green 公式成立，条件 iv) 是保证借助 Cauchy-Green 公式把 $\bar{\partial}$－方程(4.6.1)的解 $u$ 用 Cauchy 核 $K(\zeta,z)$ 的积分表示出来.

在 $n > 1$ 的情形，自然希望能找到满足条件 i)—iv) 的核，使 $\bar{\partial}$－方程的解能通过这种核的积分表示出来，这方面可以利用的工具是 $B$-$M$ 核，以后我们会到，只要将 $B$-$M$ 核适当修改就可以达到这个目的，下面我们先介绍对光滑函数的 Bochner-Martinelli 公式

的推导，从中可以给我们启发要怎样对 $B$-$M$ 核进行修改才能达到解 $\bar{\partial}$ — 方程的目的.

**定理 4.6.2** (Bochner-Martinelli)　设 $D$ 是 $C^n$ 中的有界域，$\partial D$ 可微，$f(z) \in C^\infty(\overline{D})$，则

(4.6.7) $f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$，$z \in D$，其中 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 即公式(4.1.2)中所定义的核. 如 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 全纯，则(4.6.7)变为 $B$-$M$ 积分(4.1.1).

**证明**　我们可以将公式(4.1.2)中的 $B$-$M$ 核 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 改写成

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n}\left[\partial_\zeta \log|\zeta - z|^2 \wedge (\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta \log|\zeta - z|^2)^{n-1}\right], \tag{4.6.8}$$

或者

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g_k \bar{\partial}_\zeta g_1 \wedge \cdots \wedge [k] \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}_\zeta g_n\right) \wedge d\zeta \tag{4.6.9}$$

其中

$$g_k(\zeta, z) = \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^2}. \tag{4.6.10}$$

为了得到公式(4.6.7)，下面我们对 $B$-$M$ 核 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 验证上段中 Cauchy 核 $K(\zeta, z)$ 所满足的条件 i)—iii).

i) 核 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 是 $\bar{\partial}$ 闭的 $(n, n-1)$ 形式，即

$$\bar{\partial}_\zeta \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = 0.$$

由于 $g_k(\zeta, z)$ 满足

$$\sum (\zeta_k - z_k) g_k(\zeta, z) = 1, \sum (\zeta_k - z_k) \bar{\partial}_\zeta g_k(\zeta, z) = 0, \tag{4.6.11}$$

即 $\{\bar{\partial}_\zeta g_k\}$ 线性相关，因而

$$\bar{\partial}_\zeta g_1 \wedge \bar{\partial}_\zeta g_2 \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}_\zeta g_n = 0,$$

由此立知

$$\bar{\partial}_\zeta \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = 0,$$

即 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 是 $\bar{\partial}$ 闭的 $(n, n-1)$ 形式.

*ii*) 核 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 当 $\zeta = z$ 时,奇点的阶是合适的,即

$$\int_D |\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge d\zeta_k| < +\infty.$$

由 $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 的表达式即可看出它在 $\zeta = z$ 的奇点阶数是 $2n-1$,对维数(实维数)为 $2n$ 的有界域 $D$ 来说,上式显然成立.

*iii*) $\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$ 可以计算,其中 $\partial B_\varepsilon(z)$ 是以 $z$ 为心,$\varepsilon$ 为半径的超球 $B_\varepsilon(z)$ 的边界.

在 B-M 积分公式(4.1.1)中命 $f(z) = 1$ 立知

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = 1.$$

也可直接计算如下:

由于

$$\partial_\zeta \log|\zeta - z|^2 = \frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

$$\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta \log|\zeta - z|^2 = \frac{\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} - \frac{\bar{\partial}_\zeta |\zeta - z|^2 \wedge \partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^4}$$

$$= \frac{\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^2} (\because \text{ 在 } \partial B_\varepsilon(z) \text{ 上 } \bar{\partial}_\zeta |\zeta - z|^2 \wedge \partial_\zeta |\zeta - z|^2 = 0)$$

所以

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} (\partial_\zeta \log|\zeta - z|^2) \wedge (\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta \log|\zeta - z|^2)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{\partial_\zeta |\zeta - z|^2 \wedge (\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta |\zeta - z|^2)^{n-1}}{|\zeta - z|^{2n}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \partial_\zeta |\zeta - z|^2 \wedge (\bar{\partial}_\zeta \partial_\zeta |\zeta - z|^2)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{B_\varepsilon(z)} (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta |\zeta - z|^2)^n$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{B_\varepsilon(z)} (\sum_{k=1}^n d\zeta_k \wedge d\overline{\zeta}_k)^n$$

$$= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{B_\varepsilon(z)} d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \wedge \overline{\zeta}_n$$

$$= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} (\frac{2}{i})^n V_o l. B_\varepsilon(z)$$

$$= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{\varepsilon^{2n}} (\frac{2}{i})^n \frac{\varepsilon^{2n}\pi^n}{n!} = 1.$$

由以上所述可知公式(4.6.7)成立.□

但上一段中的条件iv)对 $B$-$M$ 核不成立,即 $\omega(\zeta - z, \overline{\zeta} - \overline{z})$ 对 $z$ 不是全纯的,所以不能直接利用公式(4.6.7)得到 $\overline{\partial}$— 方程的解的积分表示,原因是单位分解

$$(4.6.12) \quad 1 = \sum (\zeta_k - z_k) g_k(\zeta, z) = \sum (\zeta_k - z_k) \frac{\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k}{|\zeta - z|^2}$$

中的 $g_k(\zeta, z)$ 对 $z$ 不是全纯的(参考公式(4.2.10)).

由于强拟凸域具有较好的几何和分析性质,例如它的边界的定义函数是多次调和的,在强拟凸域上 Cousin 问题 Ⅱ 和除法问题都是可解的,利用这些性质我们可以对强拟凸域找出新的单位分解,对 $B$-$M$ 核作适当修改,从而得到强拟凸域上 $\overline{\partial}$— 方程的解,以下我们详细介绍这个方法.

### 4.6.4 寻找新的单位分解

设 $D$ 是 $C^n$ 中具有光滑边界 $\partial D$ 的强拟凸域,并设 $\zeta \in \partial D, z \in D$ 并充份靠近 $\zeta$,将 $\rho(z)$ 按 Taylor 公式展开得

$$(4.6.13) \quad \rho(z) = \rho(\zeta) + \sum_j \rho_j(z)(z_j - \zeta_j) + \sum_j \overline{\rho_j(z)}(\overline{z}_j - \overline{\zeta}_j)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} [\rho_{jk}(\zeta)(z_j - \zeta_j)(z_k - \zeta_k) + \overline{\rho}_{jk}(\overline{z}_j - \overline{\zeta}_j)(\overline{z}_k - \overline{\zeta}_k)]$$

$$+ \sum_{j,k} \rho_{j\overline{k}}(z_j - \zeta_j)(\overline{z}_k - \overline{\zeta}_k) + 0(|\zeta - z|^2),$$

其中

$$(4.6.14)\qquad \rho_j(\zeta) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\right)(\zeta),\rho_{jk}(\zeta) = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial z_k}\right)(\zeta),$$

$$\rho_{j\bar{k}} = \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}\right)(\zeta).$$

命

$$(4.6.15)\qquad F(\zeta,z) = \sum_j \rho_j(\zeta)(z_j - \zeta_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\rho_{jk}(\zeta)(z_j - \zeta_j)(z_k - \zeta_k).$$

由于 $\rho(z)$ 是强多次调和的，存在正数 $M > 0$ 使（参见 R. C. Gunning and H. Rossi[1965] 第 266 页和 B. C. Впадимиров[1964] 第 125 页）

$$(4.6.16)\qquad \sum_{j,k}\rho_{j\bar{k}}(\zeta)(z_j - \zeta_j)(\bar{z}_k - \bar{\zeta}_k) \geqslant M|\zeta - z|^2,$$

因为 $\partial D$ 是紧的，$M$ 可以取得对所有的 $\zeta \in \partial D$ 是一致的，因此当 $z$ 充份靠近 $\zeta$ 时，适当减小 $M$，从(4.6.13) 式可以得到

$$(4.6.17)\qquad \rho(z) \geqslant \rho(\zeta) + 2ReF(\zeta,z) + M|\zeta - z|^2.$$

因当 $z \in D$ 时 $\rho(z) < 0$，又当 $\zeta \in \partial D$ 时，$\rho(\zeta) = 0$，所以

$$(4.6.18)\qquad -2ReF(\zeta,z) \geqslant M|\zeta - z|^2.$$

这样就得到一个全纯函数 $F(\zeta,z)$，当 $\zeta \in \partial D, z \in D$ 并充份靠近 $\zeta$ 时，满足 $F(\zeta,\zeta) = 0, F(\zeta,z) \neq 0$.

设

$$(4.6.19)\qquad D_\delta\{z:\rho(z) < \delta\},B_\varepsilon(\zeta) = \{z:|z - \zeta| < \varepsilon\}$$

对函数 $F(\zeta,z)$ 我们还可以证明下面的（参见 Г. М. Хенкин[1969] 引理 2.4，П. А. Айзенберг，А. П. Южаков[1979] § 10）.

**引理 4.6.1** 对某些 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 可以找到对 $z \in D\delta$ 和 $\zeta \in \partial D$ 定义的函数 $\phi(\zeta,z)$，使得

*a*) 对任意固定的 $\zeta \in \partial D$，函数 $\phi(\zeta,z)$ 关于 $z \in D\delta$ 是全纯的，且对 $z \in \overline{D}\backslash\{\zeta\}, \phi(\zeta,z) \neq 0$；

*b*) 对任意固定的 $z \in D\delta$，函数 $\phi(\zeta,z)$ 关于 $\zeta \in \partial D$ 是连续可微

的；

$c$) 对任意固定的 $\zeta\in\partial D$ 及所有的 $z\in B_\varepsilon(\zeta)\cap D\delta$ 有

$$\phi(\zeta,z)=F(\zeta,z)H(\zeta,z), \tag{4.6.20}$$

其中 $H(\zeta,z)$ 是在球 $B_\varepsilon(\zeta)$ 与区域 $D_\delta$ 的交中全纯且不为零的函数.

证明可由强拟凸域的 Cousin 问题 Ⅱ 可解得到，大意是适当选取 $\delta>0$ 可以使 $D\delta$ 还是强拟凸域，这时在 $D\sigma$ 中考虑全纯函数 $F(\zeta,z)$，因为强拟凸域的 Cousin 问题 Ⅱ 可解（参考肖荫堂[1979]，H. Grauert and K. Frische[1976]），因此可以找到一个 $D\delta$ 中全纯的函数 $\phi(\zeta,z)$ 在 $\zeta\in\partial D$ 的邻域中和 $F(\zeta,z)$ 有相同的零点，在 $D\delta$ 的其它部分不取零值，即对任意固定的 $\zeta\in\partial D$ 及所有的 $z\in B_\varepsilon(\zeta)\cap D\delta$ 有

$$\phi(\zeta,z)=F(\zeta,z)H(\zeta,z),$$

其中 $H(\zeta,z)$ 是在 $B_\varepsilon(\zeta)\cap D\delta$ 中全纯且不为零的函数，并且函数 $\phi(\zeta,z)$ 具有引理中的性质 $a$) 和 $b$).

引理 4.6.1 中的函数 $\phi(\zeta,z)$ 还有以下性质（参见 Г. М. Хенкин[1969] 引理 2.7，П. А. Айзенберг，А. П. Южаков [1979] § 10)

**引理 4.6.2** 设 $D$ 为 $C^n$ 中边界属于 $C^{(3)}$ 类的强拟凸域，而 $\phi(\zeta,z)$ 是引理 4.6.1 中定义的函数，那末有表示

$$\phi(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)P_k(\zeta,z), \tag{4.6.21}$$

其中 $z\in D\delta,\zeta\in\partial D,\{P_k(\zeta,z)\}$ 是当固定 $\zeta$ 时关于 $z\in D\delta$ 是全纯的，又当 $z$ 固定时关于 $\zeta\in\partial D$ 是连续的函数.

证明可由强拟凸域上除法问题可解得到（参考定理 4.4.1).

由 (4.6.21) 得到一个单位分解

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)}(\zeta_k-z_k)=1, \tag{4.6.22}$$

（利用它可以得到强拟凸域上全纯函数的积分表示，参考 Cauchy-Fantappiè 公式 (4.2.1)、(4.2.11)、(4.2.10) 和后面的公式

(4.6.31) 和(4.8.3)、(4.8.4) 再由(4.6.12) 可知,对任何实数 $\lambda$,都有

(4.6.23)

$$\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)\left[\lambda g_k(\zeta,z) + (1-\lambda)\frac{P_k(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)}\right] = 1,$$

记

(4.6.24) $$G_k(\lambda,\zeta,z) = \lambda g_k(\zeta,z) + (1-\lambda)\frac{P_k(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)},$$

则

(4.6.23) $$\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)G_k(\lambda,\zeta,z) = 1$$

是一个新的单位分解,其中 $g_k(\zeta,z)$ 当 $\zeta \in \partial D, z \in D$ 时,对 $z$ 不是全纯的,但 $\dfrac{P_k(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)}$ 却是 $z$ 的全纯函数,利用它可以得到强拟凸域的 $\bar{\partial}$ — 方程的解的积分表示.

### 4.6.5 Хенкин 核和 $\bar{\partial}$ — 方程的解的积分表示

在强拟凸域 $D$ 上,以 $G_k(\lambda,\zeta,z)$ 代替 $g_k(\zeta,z)$ 仿照(4.6.9) 构造一新的核

(4.6.25) $$K(\lambda,\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}G_k dG_1 \wedge \cdots \wedge [k] \wedge \cdots \wedge dG_n\right) \wedge d\zeta$$

称为 Хенкин **核**,其中

$$d = d_\lambda + d_\zeta = d_\lambda + \partial_\zeta + \bar{\partial}_\zeta.$$

现在任意固定 $z \in D$,在 $(\zeta,\lambda) \in C^n \times R$ 中研究问题.

由

$$\sum_k (\zeta_k - z_k)G_k = 1,$$

分别施行运算 $\bar{\partial}_\zeta$ 和 $d_\lambda$ 再相加得到

$$\sum_k (\bar{\partial}_\zeta G_k + d_\lambda G_k)(\zeta_k - z_k) = 0,$$

再由 $\overline{\partial}_\zeta + d\lambda = d - \partial_\zeta$ 得到

$$\sum_k (\zeta_k - z_k)(dG_k - \partial_\zeta G_k) = 0,$$

由此

$$\sum_k (\zeta_k - z_k)dG_k = \sum_k (\zeta_k - z_k)\partial_\zeta G_k = \sum_k \sum_j (\zeta_k - z_k)\frac{\partial G_k}{\partial \zeta_j}d\zeta_j$$

即

$$\sum_k (\zeta_k - z_k)dG_k \equiv 0(mod\ d\zeta_1, \cdots, d\zeta_n)$$

所以

(4.6.26) $\quad dG_1 \wedge dG_2 \wedge \cdots \wedge dG_n \equiv 0(mod\ d\zeta_1, \cdots, d\zeta_n)$

因此

(4.6.27) $\quad dK(\lambda,\zeta,z) =$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_k (-1)^{k-1}dG_k \wedge dG_1 \wedge \cdots \wedge [k] \wedge \cdots \wedge dG_n \wedge$$

$d\zeta$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} n dG_1 \wedge \cdots \wedge dG_n \wedge d\zeta = 0,$$

即 $K(\lambda,\zeta,z)$ 是 $-d$ 闭的 $2n-1$ 次形式.

设 $f(z) \in C^{(\infty)}(\overline{D})$，则有

$$d[f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z)] = \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K(\lambda,\zeta,z).$$

现在在下列区域(见图 4.6.1)

$\{\lambda \in [0,1], \zeta \in \partial D; \lambda = 1, D\backslash B_\varepsilon(z)\}$

上考虑上式的积分.

由于 $\{\lambda = 0, \zeta \in \partial D; \lambda = 1, \zeta \in \partial B_\varepsilon(z)\}$ 是上述区域的边界，所以应用 Stokes 公式得到

(4.6.28)

$$\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \zeta\in\partial D}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K(\lambda,\zeta,z) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\lambda=1\\ D\backslash B_\varepsilon(z)}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge k(\lambda,\zeta,z)$$

$$= -\int_{\substack{\lambda=0\\ \zeta\in\partial D}} f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}} f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z).$$

注意 $\lambda=0$ 时，$G_k(0,\zeta,z)=\dfrac{P_k(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}$，因而 $K(0,\zeta,z)$ 对 $z$ 是全纯的；而 $\lambda=1$ 时 $G_k(1,\zeta,z)=g_k(\zeta,z)$，因而 $K(1,\zeta,z)=\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$ 即 $B$-$M$ 核.

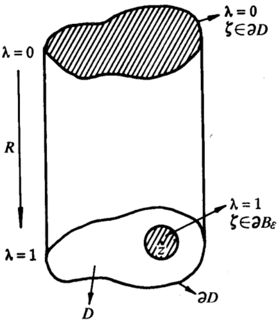



图 4.6.1

下面我们算出(4.6.28)中的极限项：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\lambda=1\\ D\setminus B_\varepsilon(z)}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge K(\lambda,\zeta,z)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D\setminus B_\varepsilon(z)}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$$
$$=\int_D\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z}),$$

由于 $f(\zeta)$ 在点 $z$ 连续，所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\lambda=1\\ \zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}}f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}f(\zeta)\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}(f(\zeta)-f(z))\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$$
$$+f(z)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\zeta\in\partial B_\varepsilon(z)}\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})=f(z).$$

将上列结果代入(4.6.28)式得

$$\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \zeta\in D}}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge K(\lambda,\zeta,z)+\int_D\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$$

$$= -\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)K(0,\zeta,z) + f(z),$$

即

$$(4.6.29)\qquad f(z) = \int_{\zeta\in\partial D}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\int_0^1 K(\lambda,\zeta,z)$$

$$+\int_D \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta - z,\overline{\zeta}-\overline{z}) + \int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)K(0,\zeta,z).$$

公式(4.6.29)是强拟凸域 $D$ 上光滑函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{D})$ 的积分表示,称为 Leray-Stokes **公式**,它具有与单复变数的 Cauchy-Green 公式(4.6.2)类似的许多性质,从它可以得到强拟凸域 $D$ 上 $\overline{\partial}$ — 方程(4.6.1)的解的积分表示.

因为 $K(0,\zeta,z)$ 对 $z$ 是全纯的,因此如记 $g=\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)$,则显然有 $\overline{\partial}g=0$,这时

$$(4.6.30)\quad u(z) = \int_{\zeta\in\partial D} g\wedge\left(\int_0^1 K(\lambda,\zeta,z)\right) + \int_D g\wedge\omega(\zeta - z,\overline{\zeta}-\overline{z})$$

是强拟凸域 $D$ 上 $\overline{\partial}$ — 方程(4.6.1)的无穷可微解,公式(4.6.30)称为 Хенкин 公式.

当 $f(z)$ 在强拟凸域 $\overline{D}$ 上全纯时,则公式(4.6.29)变为

$$(4.6.31)\qquad f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)K(0,\zeta,z)$$

这个公式称为**强拟凸域 $\overline{D}$ 上全纯函数的** Хенкин-Ramires **积分表示**(Г. М. Хенкин[1969],E. Ramires de Arellano[1970]).

## §4.7 $\overline{\partial}$ — 方程的解的 $L^\infty$ 估计

综合上节所述可写成下列定理

**定理 4.7.1** 设 $D$ 是 $C^n$ 中具有光滑边界 $\partial D$ 的强拟凸域,即 $D=\{z:\rho(z)<0\}$,其中 $\rho(z)$ 是实函数且 $\rho(z)\in C^{(3)}(\overline{D})$. $g=\sum g_k d\overline{z}^k$ 是定义于 $D$ 的 $C^{(\infty)}(\overline{D})$,(0,1) 形式,即 $g\in C^{(\infty)}_{0,1}(\overline{D})$,并满足 $\overline{\partial}g=0$,那末由公式(4.6.30)或

(4.6.30) $$u(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\int_{\partial D\times[0,1]}g\wedge\omega'(\eta)\wedge\omega(\eta)+\int_D\frac{\sum_{k=1}^n g_k(\bar\zeta_k-\bar z_k)}{|\zeta-z|^{2n}}\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\Big]$$

所定义的函数 $u(z)$，是 $\bar\partial$ — 方程(4.6.1)的无穷可微解，其中

(4.7.1) $$\omega(\zeta)=d\zeta=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n,$$

(4.7.2) $$\omega'(\eta)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\eta_k d\eta_1\wedge d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_{k-1}\wedge d\eta_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\eta_n,$$

(4.7.3) $$\eta_k=G_k=\lambda\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{|\zeta-z|^2}+(1-\lambda)\frac{P_k(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},$$
$$(k=1,2,\cdots,n),\zeta\in\partial D,\lambda\in[0,1],$$

并且有一致估计

(4.7.4) $\|u\|_{L^\infty}\leqslant c\|g\|_{L^\infty}$，$C$ 为不依赖于 $g$ 的常数，其中

(4.7.5)
$$\|u(z)\|_{L^\infty}=\max_{z\in\bar D}|u(z)|,\|g\|_{L^\infty}=\sum_{k=1}^n\|g_k(z)\|_{L^\infty}.$$

以下只要证明一致估计式(4.7.4)成立.

注意　一致估计式(4.7.4)中的常数 $C$ 与 $D$ 有关，即 $C=C(D)$，$C(D)$ 不仅依赖于区域 $D$ 的直径，而且还依赖于区域 $D$ 的其它参数，特别是依赖于区域 $D$ 的强拟凸性.

**证明**　由于(参考定理 4.6.2 的证明)

$$\int_D|\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)\wedge d\zeta_k|<+\infty,$$

所以

$$\Big|\int_D g(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\bar\zeta-\bar z)\Big|<\text{常数}\times\|g\|_{L^\infty}.$$

因此只需要证明积分

(4.7.6) $$\int_{\zeta\in\partial D}g\wedge\Big(\int_0^1K(\lambda,\zeta,z)\Big)$$

当 $z \in D$ 时，对 $\zeta \in \partial D$，积分是一致有界的，其中核 $K(\lambda,\zeta,z)$ 的表达式是(4.6.25).

首先计算核 $K(\lambda,\zeta,z)$，我们有

$$dG_k = \overline{\partial}_\zeta G_k + \partial_\zeta G_k + d_\lambda G_k = \overline{\partial}_\zeta G_k + \partial_\zeta G_k + \frac{\partial G_k}{\partial \lambda} d\lambda,$$

因为 $\partial_\zeta G_k \wedge d\zeta = 0$，所以计算核时 $\partial_\zeta G_k$ 这项不必放进去，所以

$$K(\lambda,\zeta,z) = C_0\Big[\sum_k (-1)^{k-1} G_k \Big(\overline{\partial}_\zeta G_1 + \frac{\partial G_1}{\partial \lambda} d\lambda\Big) \wedge \cdots \wedge \widehat{\Big(\overline{\partial}_\zeta G_k + \frac{\partial G_k}{\partial \lambda} d\lambda\Big)} \wedge \cdots \wedge \Big(\overline{\partial}_\zeta G_n + \frac{\partial G_n}{\partial \lambda} d\lambda\Big)\Big] \wedge d\zeta$$

$$= C_0\Big(\sum_k (-1)^{k-1} G_k \sum_{j\neq k} \overline{\partial}_\zeta G_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_{j-1} \wedge \frac{\partial G_j}{\partial \lambda} d\lambda \wedge \overline{\partial}_\zeta G_{j+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_k} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_n\Big) \wedge d\zeta + \text{无 } d\lambda \text{ 的项}$$

$$= C_0\Big(\sum_k \sum_{j<k} (-1)^{j+k} G_k \frac{\partial G_j}{\partial \lambda} d\lambda \wedge \overline{\partial}_\zeta G_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_j} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_k \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_n + \sum_k \sum_{j>k} (-1)^{j+k+1} G_k \frac{\partial G_j}{\partial \lambda} d\lambda \wedge \overline{\partial}_\zeta G_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_j} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_n\Big) \wedge d\zeta + \text{无 } d\lambda \text{ 的项}$$

$$= C_0\Big(\sum_{k<j} (-1)^{k+j+1} \begin{vmatrix} G_k & G_j \\ \dfrac{\partial G_k}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial G_j}{\partial \lambda} \end{vmatrix} d\lambda \wedge \overline{\partial}_\zeta G_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\zeta G_j} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\zeta G_n\Big) \wedge d\zeta + \text{无 } d\lambda \text{ 的项},$$

其中 $C_0 = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$.

注意，估计积分(4.7.6)时不必考虑无 $\lambda$ 的项，由于在 $\partial D$ 上 $\overline{d\zeta} \wedge d\zeta = 0$，而 $K(\lambda,\zeta,z)$ 展开式中的 $d\lambda \wedge d\overline{\zeta}_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_{\nu_{n-2}} \wedge d\zeta$ 的系数是

$$(4.7.7)\qquad \begin{vmatrix} G_1 & \cdots\cdots & G_n \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial \lambda} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial \bar{\xi}_{\nu_{n-2}}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial \bar{\xi}_{\nu_{n-2}}} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记作}} \mathscr{D}$$

由于

$$G_k = \lambda g_k + (1-\lambda)\frac{P_k}{\Phi} = \lambda \frac{\bar{\xi}_k - \bar{z}_k}{|\xi - z|^2} + (1-\lambda)\frac{P_k}{\Phi},$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial \lambda} = \frac{\bar{\xi}_k - \bar{z}_k}{|\xi - z|^2} - \frac{P_k}{\Phi},$$

所以

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda(\bar{\xi}_1 - \bar{z}_1)}{|\xi - z|^2} + (1-\lambda)\dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots \\ \dfrac{\bar{\xi}_1 - \bar{z}_1}{|\xi - z|^2} - \dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} \xrightarrow{(-\lambda)\times\text{第二行加到第一行去}}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots \\ \dfrac{\bar{\xi}_1 - \bar{z}_1}{|\xi - z|^2} - \dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第一行加到第二行去}} \begin{vmatrix} \dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots \\ \dfrac{\bar{\xi}_1 - \bar{z}_1}{|\xi - z|^2} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$
\to (-1)\begin{vmatrix}
\dfrac{\bar{\xi}_1-\bar{z}_1}{|\xi-z|^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\bar{\xi}_1-\bar{z}_n}{|\xi-z|^2} \\
\dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots & \dfrac{P_n}{\Phi} \\
\dfrac{\partial G_1}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} \\
 & \cdots\cdots & \\
\dfrac{\partial G_1}{\partial \bar{\xi}_{\nu_{n-2}}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial \bar{\xi}_{\nu_{n-2}}}
\end{vmatrix}
$$

又由于

$$
\frac{\partial G_k}{\partial \bar{\xi}_\nu}=-\frac{\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^k_{\nu_i}-\lambda\frac{\bar{\xi}_k-\bar{z}_k}{|\xi-z|^4}\cdot\frac{\partial|\xi-z|^2}{\partial \bar{\xi}_\nu}
+\frac{(1-\lambda)}{\Phi}\frac{\partial P_k}{\partial \bar{\xi}_\nu}-(1-\lambda)\frac{P_k}{\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\xi}_\nu},
$$

和上面一样经过行列式的计算可得

(4.7.8) $\mathscr{D}=$

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\bar{\xi}_1-\bar{z}_1}{|\xi-z|^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\bar{\xi}_n-\bar{z}_n}{|\xi-z|^2} \\
\dfrac{P_1}{\Phi} & \cdots\cdots & \dfrac{P_n}{\Phi} \\
\dfrac{-\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^1_{\nu_1}+\dfrac{1-\lambda}{\Phi}\dfrac{\partial P_1}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{-\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^n_{\nu_1}+\dfrac{1-\lambda}{\Phi}\dfrac{\partial P_n}{\partial \bar{\xi}_{\nu_1}} \\
 & \cdots\cdots & \\
 & \cdots\cdots &
\end{vmatrix}
$$

行列式 $\mathscr{D}$ 关于 $\lambda$ 是一个多项式,因此$\int_0^1 K(\lambda,\zeta,z)$ 对 $\lambda$ 的积分显然是有界的,我们要证明的是行列式 $\mathscr{D}$ 当 $z\in D$ 时对 $\zeta\in\partial D$ 积分是一致有界的. $\mathscr{D}$ 中的奇点只在 $z=\zeta\in\partial D$,因此完全看积分

(4.7.6) 当 $z \to \zeta \in \partial D$ 时的性状.

由(4.6.15)和(4.6.20)可知

(4.7.9) $$|\phi(\zeta,z)| \geqslant \text{常数} \times |\zeta - z|^2$$

(这个常数与区域 $D$ 的强拟凸性有关),因此 $\mathscr{D}$ 中除第一行在 $z=\zeta$ 的奇点阶数为1外,其余各行奇点的阶数都是2,因此关键是要当 $z \to \zeta$ 时估计积分

(4.7.10) $$\int_{\zeta\in\partial D} \frac{\sigma(d\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-3}|\phi|},$$

其中 $\sigma(d\zeta)$ 是区域 $D$ 的边界 $\partial D$ 上的 $2n-1$ 维体积元素.

由于

$$\int_{\zeta\in\partial D} \frac{\sigma(d\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-3}|\phi|} = \int_{\zeta\in[\partial D\setminus S(\zeta,\delta_0)\cap\partial D]} + \int_{\zeta\in S(\zeta,\delta_0)\cap\partial D},$$

而第一个积分是没有奇点的收敛积分,所以只要估计第二个积分

(4.7.11) $$\int_{\zeta\in S(\zeta,\delta_0)\cap\partial D} \frac{\delta(d\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-3}|\phi|}$$

由引理4.6.1函数 $\phi(\zeta,z)$ 在 $\zeta\in\partial D$ 的邻域中和 $F(z,\zeta)$ 有相同的零点,同时利用关系式 $|F| \sim |ReF| + |ImF|$ 和

(4.7.12) $|ReF| \geqslant \text{常数} \times |\zeta - z|^2$,

这时只要估计积分

(4.7.13) $$I = \int_{\zeta\in S(\zeta,\delta_0)\cap\partial D} \frac{\sigma(d\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-3}(|\zeta - z|^2 + |ImF|)}$$

将边界 $\partial D$ 的 $\delta$ 邻域记为 $(\partial D)_\delta$,即

$$(\partial D)_\sigma = \bigcup_{\zeta\in\partial D} S(\zeta,\delta).$$

现在在固定点 $z \in (\partial D)_{\delta_0} \cap \overline{D}$ 的邻域 $S(z,\delta_0)$ 进行变量替换,将复坐标 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 代以实坐标 $t_1,t_2,\cdots,t_{2n}$,假设 $t_i(\zeta)$ 是 $\zeta$ 的连续函数,使得:

1) $t_i(z) = 0, (i = 1,2,\cdots,2n)$,

2) $t_1 = \rho(\zeta) - \rho(z)$,

3) $t_2 = \mathrm{Im}F(\zeta,z)$. 如果在点 $z$ 关于 $\zeta$ 的梯度

$$\mathrm{grad}\rho(\zeta)|_{\zeta=z}, \mathrm{grad}\ \mathrm{Im}F(\zeta,z)|_{\zeta=z}$$

异于零且不成比例，则上述变量替换对任意充份小的 $\delta_0$ 都可以作出.

事实上，如果 $z \in (\partial D)_{\delta_0} \cap \overline{D}$ 且 $\delta_0$ 充份小，那末由定理对函数 $\rho$ 所加的条件可以证明 $\operatorname{grad} \rho(\zeta)|_{\zeta=z} \neq 0$ (Г. М. Хенкин[1969] 引理 2.3).

由

$$(4.6.13)' \quad \rho(z) = \rho(\zeta) + 2\mathrm{Re}F(\zeta,z) + \sum_{j,k} \rho_{j\bar{k}}(z_j - \zeta_j)(\bar{z}_k - \bar{\zeta}_k) + 0(|\zeta - z|^2)$$

可推出等式

$$(4.7.14) \quad \operatorname{grad} \mathrm{Re}F(\zeta,z)|_{\zeta=z} = \frac{-1}{2}\operatorname{grad} \rho(\zeta)|_{\zeta=z}.$$

此外，从函数 $F(\zeta,z)$ 的公式(4.6.15) 可以得到条件

$$(4.7.15) \quad \left.\frac{\partial F(\zeta,z)}{\partial \zeta_k}\right|_{\zeta=z} = -\left.\frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_k}\right|_{\zeta=z}.$$

如果命 $\zeta_k = x_k + iy_k$，那末由(4.6.13)′ 和(4.7.15) 可知

$$(4.7.16) \quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial ImF(\zeta,z)}{\partial x_k}\right|_{\zeta=z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial y_k}, \\ \left.\dfrac{\partial ImF(\zeta,z)}{\partial y_k}\right|_{\zeta=z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial x_k}. \end{cases}$$

这表明对任意的 $z \in (\partial D)_{\delta_0} \cap \overline{D}$

$|\operatorname{grad} \mathrm{Im}F(\zeta,z)|_{\zeta=z} = \frac{1}{2}|\operatorname{grad} \rho(\zeta)|_{\zeta=z} \neq 0$，并且向量 $\operatorname{grad} \mathrm{Im}F(\zeta,z)|_{\zeta=z}$ 垂直于向量 $\operatorname{grad} \rho(\zeta)|_{\zeta=z}$.

施行上述坐标变换后，可以证明

$$(4.7.17) \quad \sigma(d\zeta) \leqslant \gamma_1 dt_2 dt_3 \cdots dt_{2n},$$

$$(4.7.18) \quad |\zeta - z|^2 \geqslant \gamma_2(t_2^2 + t_3^2 + \cdots + t_{2n}^2),$$

其中 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是与 $z$ 和 $\zeta$ 无关的常数.

因此当 $\delta_0$ 充份小时，对任意的 $z \in (\partial D)_{\delta_0} \cap \overline{D}$，我们有估计

$$I \leqslant \gamma_3 \int_{\zeta \in S(\zeta,\delta_0) \cap \partial D}$$

$$\frac{dt_2dt_3\cdots dt_{2n}}{(t_2^2+t_3^2+\cdots+t_{2n}^2)^{n-\frac{3}{2}}[(t_2^2+t_3^2+\cdots+t_{2n}^2)+|t_2|]}$$

命 $$t_2^2+t_3^2+\cdots+t_{2n}^2=r^2$$

由于 $\delta_0$ 充份小，只要证明积分

(4.7.19) $$\int_{t_2^2+t_3^2+\cdots+t_{2n}^2=r^2_{(r<1)}}\frac{dt_2dt_3\cdots dt_{2n}}{r^{2n-3}(r^2+|t_2|)}$$

有界就行.

利用球坐标$(r,\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_{2n-2})$：

$$t_2=r\sin\varphi_2$$

$$t_3=r\cos\varphi_2\sin\varphi_3$$

$$\cdots\cdots$$

(4.7.20) $$t_{2n-1}=r\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cdots\cos\varphi_{2n-2}\sin\varphi_{2n-1}$$

$$t_{2n}=r\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cdots\cos\varphi_{2n-2}\cos\varphi_{2n-1}$$

$$0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,\cdots,0\leqslant\varphi_{2n-3}\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_{2n-2}\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_{2n-1}\leqslant 2\pi,$$

$$J=\frac{\partial(t_2,t_3,\cdots,t_{2n})}{\partial(r,\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_{2n})}=r^{2n-2}\cos^{2n-3}\varphi_2\cos^{2n-4}\varphi_3\cdots\cos\varphi_{2n-2}$$

积分(4.7.19)化为

$$\int_0^1\int_0^\pi\frac{drd\theta}{(r+|\sin\theta|)}\times\text{常数}\qquad(\text{其中 }\theta=\varphi_2)$$

的估计，但 $k\theta\leqslant|\sin\theta|$，$k$ 是某实常数，所以

$$\int_0^1\int_0^\pi\frac{drd\theta}{(r+|\sin\theta|)}\leqslant\int_0^1\int_0^\pi\frac{drd\theta}{(r+k\theta)}$$

$$=\int_0^\pi(ln(1+k\theta)-lnk\theta)d\theta<+\infty.$$

定理证明. □

强拟凸域的 $\bar\partial$ - 方程(4.6.1)已经拓广到当 $g$ 是定义于 $D$ 的 $C^\infty(\overline{D})$，$(0,q)$ 形式，即 $g\in C_{0,q}^{(\infty)}(\overline{D})$，和定义于 $D$ 的 $C^\infty(\overline{D})$，$(p,q)$ 形式，即 $g\in C_{p,q}^{(\infty)}(\overline{D})$ 的情形，这时分别存在$(0,q-1)$型和$(p,q-1)$型可穷可微解(I. Lieb[1970]，[1972]，H. Φvrelid[1971]，B. Berndtsson，M. Andersson[1982]). 关于解的光滑性除了一致估计以

外，还有 Hölder 估计和 $L^p$ 估计(N. Kerzman[1971]). R. M. Range 和 Sin Yum-Tong(肖荫堂)[1973] 还对边界 $\partial D$ 是逐块光滑时的一致估计作了研究. 我们将在 §4.9 和 §4.10 作一些介绍.

## §4.8 强拟凸域上全纯函数的积分表示

在 §4.6 末了我们得到了强拟凸域上全纯函数的 Хенкин-*Ramirez* 积分表示(4.6.31). 由于(考虑(4.6.25))

(4.8.1) $K(0,\zeta,z)=\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\dfrac{\omega'[P(\zeta,z)]\omega(\zeta)}{\Phi^n(\zeta,z)}=\omega(\zeta-z,P(\zeta,z))$，其中 $P(\zeta,z)=(P_1(\zeta,z),P_2(\zeta,z),\cdots,P_n(\zeta,z))$，如果命

(4.8.2) $K(\zeta,z)\sigma(d\zeta)=\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'(P(\zeta,z))\omega(\zeta)$，其中 $\sigma(d\zeta)$ 是强拟凸域 $D$ 的边界 $\partial D$ 上的 $(2n-1)$ 维体积元素，那末我们可以将这个结果写成下述

**定理 4.8.1** (Хенкин — *Ramirez*). 设 $D$ 是 $C^n$ 中边界属于 $C^{(3)}$ 类的强拟凸域，设 $\Phi(\zeta,z)$ 是引理 4.6.1 中定义的函数，$P(\zeta,z)$ 是引理 4.6.2 中定义的函数，那末对于任意的函数 $f(z)\in A_c(D)$ 有积分表示

$$(4.8.3)\qquad f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\omega(\zeta-z,p(\zeta,z))$$

或

$$(4.8.4)\qquad f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta),\frac{K(\zeta,z)}{\Phi^n(\zeta,z)}\sigma(d\zeta),$$

其中 $K(\zeta,z)$ 是关于 $z\in D\delta$，全纯，关于 $\zeta\in\partial D$ 连续的函数，$\sigma(d\zeta)$ 是强拟凸域 $D$ 的边界 $\partial D$ 上的 $(2n-1)$ 维体积元素。

**注意：** 公式(4.8.3) 也可利用由引理 4.6.2 中所定义的向量函数 $p(\zeta,z)=(p_1(\zeta,z),p_2(\zeta,z),\cdots\cdots p_n(\zeta,z))$ 直接由 Cauchy — Fantappiè 公式(4.2.1) 得到.

# § 4.9 具有逐块光滑边界的强拟凸域上的 Leray — Norguet 公式

**定义 4.9.1** 设 $D \subset C^n$ 是一开集，$D$ 的边界 $\partial D$ 称为逐块 $C^{(1)}$ 光滑的，如果存在 $\partial D$ 的一个邻域 $U$ 的一个有限开复盖 $\{V_j\}_1^N$ 和 $C^{(1)}$ 函数

$\rho_k: V_k \to R, k = 1, \cdots, N$，使得满足下列条件：

(1) $\partial D \subseteqq V_1 \cup \cdots \cup V_N$.

(2) 点 $z \in V_1 \cup \cdots \cup V_N$ 属于 $D$ 当且仅当，存在 $-1 \leqslant k \leqslant N$ 使 $z \in V_k, \rho_k(z) < 0$.

(3) 对每一指标集 $1 \leqslant k_1 < \cdots\cdots < k_l \leqslant N$，和对每一点 $z \in V_{k_1} \cap \cdots \cap V_{k_l}, d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_l}(z) \neq 0$.

命 $S_k: = \{z \in \partial D \cap V_k: \rho_k = 0\}$，对于 $k = 1, \cdots, N$. 对整数 $1 \leqslant k_1, \cdots, k_l \leqslant N$ 的每一有序集 $K = (k_1, \cdots, k_l)$，定义

$$S_K: = \begin{cases} S_{k_1} \cap \cdots \cap S_{k_l}, & \text{如果整数 } k_1 \cdots, k_l \text{ 是不同的配对}, \\ \varnothing & ,\text{否则}. \end{cases}$$

我们选择 $S_K$ 的定向使得

$$\partial D = \sum_{k=1}^{N} S_k, \tag{4.9.1}$$

使得

$$\partial S_K = \sum_{j=1}^{N} S_{Kj}, \tag{4.9.2}$$

其中 $\partial D$ 和 $\partial S_K$ 的定向分别是由 $D$ 和 $S_K$ 的定向诱导的，又 $K_j: = (k_1, \cdots, k_l, j)$，如果 $K = (k_1, \cdots, k_l) \cdot S_K$ 的定向关于 $K$ 的分量是斜对称的.

以 $\triangle$ 表示所有点 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in R^{(N+1)}$ 的子集，使得，$\lambda_j \geqslant 0$

对于 $j=0,1,\cdots,N$，且 $\sum_{j=0}^{N}\lambda_j=1$. 以形式 $d\lambda_1\wedge\cdots\wedge d\lambda_N$ 定义 $\triangle$ 的方向. 对整数 $0\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant N$ 的每一个严格增加的指标集 $I=(i_1,\cdots,i_l)$，命

$$\triangle_I := \{\lambda\in\triangle : \sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_r}=1\}$$

并选择 $\triangle_I$ 的定向使得

$$(4.9.3)\qquad \partial\triangle_I=\sum_{r=1}^{l}(-1)^{r-1}\triangle_{i_1,\cdots,\hat{i}_r,\cdots,i_l}.$$

容易看得出，对整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 的每一严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots k_l)$，$\triangle_{ok}$ 具有由形式 $d\lambda_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\lambda_{k_l}$($OK:=(0,k_1,\cdots,k_l)$) 定义的定向. 这表示对 $k=0,1,2,\cdots,N$，单点集 $\triangle_k$ 的定向是 $+1$.

对整数的每一个指标集 $I=(i_1,\cdots,i_l)$，记 $|I|:=l$.

**引理 4.9.1**

$$(4.9.4)\qquad \partial\sum_K(-1)^{|K|}S_K\times\triangle_{OK})=\sum_K S_K\times\triangle_K-\partial D\times\triangle_0,$$

其中求和是对整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 的所有严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 进行的.

**证明** 由于 $\dim_R S_k=2n-|k|$，我们得到(4.9.4)的左端等于

$$\sum_K(-1)^{|K|}(\partial S_K\times\triangle_{OK}+(-1)^{2n-|K|}S_K\times\partial\triangle_{OK}).$$

由(4.9.2)和(4.9.3)表示(4.9.4)的左端等于

$$\sum_K(-1)^{|K|}\sum_{j=1}^{N}S_{Kj}\times\triangle_{OK}+\sum_K S_K\times\triangle_K$$

$$+\sum_K S_K\times\sum_{r=1}^{|K|}(-1)^r\triangle_{0,k_1,\cdots,\hat{k}_r,\cdots,k_{|K|}}$$

如果 $K=(k_1,\cdots,k_{|K|})$. 因此，由于 $\sum_{|K|=1}S_K\times\triangle_0]=\partial D\times\triangle_0$，剩下只要证明

$$(4.9.5)\qquad \sum_K(-1)^{|K|}\sum_{j=1}^{N}S_{kj}\times\triangle_{OK}+$$

$$\sum_{|K|\geqslant 2} S_K \times \sum_{r=1}^{|K|}(-1)^r \triangle_{0,k_1\cdots,\hat{k}_r,\cdots,k_{|K|}} = 0.$$

当 $l=1,\cdots,N$,我们以 $P_l$ 表示整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 中所有严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 所成的集合. 如果 $K=(k_1,\cdots,k_l)\in P_l$,然后以 $K^c$ 表示 $p_{N-l}$ 中使 $K\cup K^c=\{1,\cdots,N\}$ 所成的集合. 如果 $K'=(k'_1,\cdots,k'_{l+1})\in P_{l+1}$ 和 $j\in K'$,即对某些 $1\leqslant r\leqslant l+1, j=k'_r$,则记 $\nu(K',j):=r$ 和 $L(K,j):=(k'_1,\cdots,\hat{k}'_r,\cdots,k'_{l+1})$. 由于当 $j\in k$ 时 $S_{kj}=\varnothing$,则(4.9.5) 可以写成

$$\sum_{l=1}^{N-1}\Big[\sum_{\substack{K\in P_l\\ j\in K^C}}(-1)^l S_{kj}\times\triangle_{OK} + \sum_{\substack{K'\in P_{l+1}\\ i\in K'}}(-1)^{\nu(K',i)}S_{K'}\times\triangle_{OL(K',i)}\Big]=0. \tag{4.9.6}$$

对每一对$(k,j)$ 其中 $K\in P_l$ 和 $j\in K^c$,存在一对和仅有一对$(K',i)$,其中 $K'\in P_{l+1}$ 和 $i\in K'$,使得 $L(K',i)]=K$ 和 $i=j$. 而且每个这样的配对$(K',i)$ 都可这样得到. 所以,只要证明对所有的 $1\leqslant l\leqslant N-1, K'\in P_{l+1}$ 和 $j\in K'$ 有

$$(-1)^l S_{L(K',j)j}\times\triangle_{OL(K',j)}+(-1)^{\nu(K',j)}S_{K'}\times\triangle_{OL(K',j)}=0,$$

但这由关系式 $S_{L(K',j)j}=(-1)^{\nu(K',j)-l-1}S_{K'}$ 立即可以得知. □

以下我们将具有光滑边界的强拟凸域$D$上的 Leray — Stokes 公式(4.6.29) 拓广到强拟凸域 $D$ 的边界是定义 4.9.1 意义下的逐块光滑边界的情形. 先将 Leray — Stokes 公式(4.6.29) 写成

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[&\int_{\partial D}f(\zeta)\omega'_\zeta\Big(\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}\Big)\wedge\omega(\zeta) \\ &+\int_{\partial D\times[0,1]}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\lambda g(\zeta,z) \\ &+(1-\lambda)\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}\Big)\wedge\omega(\zeta) \\ &+\int_D\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta\Big(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\omega(\zeta)\Big]. \end{aligned} \tag{4.6.29$'$}$$

其中 $\omega(\zeta)$ 和 $\omega'(\eta)$ 分别由(4.7.1) 和(4.7.2) 所定义.

设 $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 的指标集，对具有逐块光滑边界的强拟凸域定义新的单位分解

$$(4.9.7)\qquad t(z,\zeta,\lambda):=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{P^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}.$$

我们有

**引理 4.9.2** 设 $f$ 为一在强拟凸域 $\overline{D}$ 上的连续函数，使得形式 $\overline{\partial}f$ 在 $\overline{D}$ 上还是连续的. 那未对任一固定的 $z\in D$ 和整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 的每一严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$，在广义函数意义下

$$(4.9.8)\qquad \begin{aligned}&d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)]\\&=\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)\end{aligned}$$

对所有 $\lambda\in\triangle_{0K}$ 和在 $S_K$ 的某一邻域上的 $\zeta$.

证明只要重复 § 4.6 对

$$d[f(\zeta)K(\lambda,\zeta,z)]=\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge K(\lambda,\zeta,z)$$

时的证明.

**定理 4.9.1** (Leray — Norguet) 设 $f$ 为一在强拟凸域 $\overline{D}$ 上的连续函数，使得形式 $\overline{\partial}f$ 在 $\overline{D}$ 上还是连续的，那未

$$(4.9.9)\qquad \begin{aligned}f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Bigg[&\sum_{|K|\leqslant n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\triangle_K}\\&f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{P^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}\Big)\wedge\omega(\zeta)\\-&\sum_{|K|\leqslant n-1}(-1)^{|K|}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\triangle_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)\\&-\int_{D\times\triangle_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\omega(\zeta)\Bigg],\end{aligned}$$

其中求和展布在整数 $1\leqslant k_1<\cdots<k_l\leqslant N$ 的所有严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 上，并分别有 $l\leqslant n$ 和 $l\leqslant n-1$.

**证明** 由于在 $(D/z)\times\triangle_0$ 上，形式 $\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))$

$\wedge\ \omega(\zeta)$ 和 $\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'_\zeta\left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)$ 一致，由 Bochner — Martinelli 公式(4.6.7) 我们有

$$(4.9.10)\quad f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[\int_{\partial D\times\triangle_0}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)\right.$$

$$\left.-\int_{D\times\triangle_0}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)\right]$$

由 Stokes 公式

$$\int_{\partial D\times\triangle_0}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)$$

$$=-\sum_K(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}$$

$$\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)+$$

$$+\sum_K\int_{S_K\times\triangle_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta).$$

再者由于 $\dim_R S_K=2n-|K|$，而上式右端第一个积分的积分号下的形式关于 $\zeta$ 的次数 $\geqslant n+1$，第二个积分的积分号下的形式关于 $\zeta$ 的次数 $\geqslant n$，所以第一个积分当 $|K|\geqslant n$ 时为 0，第二个积分当 $|K|\geqslant n+1$ 时为 0. 因此由上式和(4.9.10) 即可推出(4.9.9). □

R. M. Range 和 Siu Yum — Tong[1973] 对边界 $\partial D$ 是定义 4.9.1 意义下的逐块光滑的强拟凸域 $D$ 上$(0,q)$ 型 $\bar{\partial}$— 方程的无穷可微解和一致估计作了研究.

## § 4.10　$(p,q)$ 型 $\bar{\partial}$— 方程的解具有权因子的积分表示

### 4.10.1　问题的由来

我们光回顾一下单复变数的情形，设 $D\subset C^1$ 是一域，$f$ 是定义

于 $D$ 的 $C^{(\infty)}(\bar{D})$，$(0,1)$ 形式，即 $f \in C_{0,1}^{(\infty)}(\bar{D})$ 并满足 $\bar{\partial} f = 0$，那末由 Cauchy — Green 公式(4.6.2)立知方程 $\bar{\partial} u = f$ 的无穷可微解为

$$u = -\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f \wedge d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.10.1}$$

即我们有

$$f = -\bar{\partial} \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f \wedge d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4.10.2}$$

如果函数 $F(\zeta,z)$，关于 $z \in D$ 是全纯的，关于 $\zeta$ 是 $C^{(1)}$ 类的，并且当 $\zeta = z$ 时，$F = 1$，那末由于 $F(\zeta,z) = 1 + (\zeta - z)g(\zeta,z)$ 易知也有

$$f = -\bar{\partial} \frac{1}{2\pi i} \int_D F(\zeta,z) \frac{f \wedge d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4.10.3}$$

这表示只要将 $\bar{\partial}$— 方程的解的积分表示(4.10.2)简单的乘上函数 $F(\zeta,z)$ 就可得另一解的积分表示. 函数 $F(\zeta,z)$ 称为**权因子**. $\bar{\partial}$— 方程具有权因子的积分表示在应用中有很大的自由度，例如在函数的内插等问题上应用起来很方便.

人们自然会想到权因子的思想怎样拓广到多变复变数的情形，这时步骤没有那样简单，因为在多复变数的情形积分核的奇点复杂得多.

### 4.10.2 核的构造

设 $D \subset C^n$ 是一域，下面我们就 $(p,q)$ 型 $\bar{\partial}$— 方程

$$\bar{\partial} u = f \tag{4.10.4}$$

来具体构造它的解具有权因子的积分表示，其中 $f$ 是一 $(p,q)$ 形式，它的系数属于 $C^{(1)}(\bar{D})$，即 $f \in C_{p,q}^{(1)}(\bar{D})$.

我们先构造积分核.

我们从考虑 $C^n \times C^n$ 上的形式

$$A = \exp\langle \xi, \eta \rangle \omega(\xi) \wedge \omega(\eta)$$

开始，其中

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_1^n \xi_j \eta_j, \omega(\xi) = d_{\xi_1} \wedge \cdots \wedge d_{\xi_n}$$

考虑一映射

$S = (s_1, \cdots, s_n): \bar{D} \times \bar{D} \to C^n$，假设映射 $S$ 是属于 $C^{(1)}$ 的，并且对 $\zeta \in \bar{D}$ 及 $D$ 中任一紧致子集中的 $z$ 一致地满足

(4.10.5) $|s(\zeta,z)| \leqslant C|\zeta - z|$ 和 $|< s, \zeta - z >| \geqslant M|\zeta - z|^2$.

并且假定 $s$ 满足条件

(4.10.6) $S(\zeta,s)$ 当 $\zeta \in \partial D$ 固定时对 $z \in D$ 是全纯的.

如果 $D$ 是强拟凸域，那末映射 $S(\zeta,z)$ 就可取作引理 4.6.2 中的 $P(\zeta,z)$，上述条件显然满足.

我们引进另一映射

$$Q = (Q, \cdots, Q_n): \bar{D} \times \bar{D} \to C^n,$$

假设映射 $Q$ 也是属于 $C^{(1)}$ 的，并且当 $\zeta \in \bar{D}$ 固定时关于 $z \in D$ 是全纯的.

然后定义映射

$$\psi: (\bar{D} \times \bar{D} \setminus \triangle) \times (0, \infty) \to C^n \times C^n$$

为 $$\psi(\zeta, z, t) = (Q + ts, \zeta - z)$$

其中 $\triangle$ 为 $\bar{D} \times \bar{D}$ 中的对角线，并命

$N = \psi^* A =$

$\exp(< Q, \zeta - z > + t < s, \zeta - z >) \omega(Q + ts) \wedge \omega(\zeta - z)$

为 $A$ 到 $(\bar{D} \times \bar{D} \setminus \triangle) \times (0, \infty)$ 的拉回.

命

$$N = N_t + N',$$

其中 $N_t$ 为 $N$ 中包含 $dt$ 的分量. 我们有

(4.10.7) $N_t = \exp < Q + ts, \zeta - z > \sum_{j=1}^n (dQ_1 + tds_1) \wedge$

$$\cdots \wedge s_j dt \wedge \cdots \wedge (dQ_n + t ds_n) \wedge \omega(\zeta - z)$$

$$= - \exp\langle Q, \zeta - z\rangle \exp t\langle s, \zeta - z\rangle (t^{n-1}$$

$$\omega'(s) \wedge \omega(\zeta - z) \wedge dt + \sum_{k=0}^{n-2} t^k a_k \wedge dt),$$

其中 $\omega'(s) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} s_j \bigwedge_{i \neq j} ds_i$，$a_k$ 为不含 $t$ 的形式.

(4.10.8) $\quad N' = \exp\langle Q + ts, \zeta - z\rangle (dQ_1 + t ds_1) \wedge \cdots \wedge (dQ_n + t ds_n) \wedge \omega(\zeta - z).$

定义积分核 $K$ 为

(4.10.9) $$K = \int_0^\infty N_t.$$

为了使这定义有意义，暂时假定当 $\zeta \neq z$ 时，$R_e < s, \zeta - z > < 0$，但以后会看到这不是必要的(参考后面的引理 4.10.4). 经计算有

(4.10.10) $\quad K = -(n-1)!(\exp < Q, \zeta - z >) < s, \zeta - z >^{-n} \omega'(s) \wedge \omega(\zeta - z) + T_1,$

其中 $T_1$ 的系数为 $O((|\zeta - z|^{2-2n})$，所以 $K$ 实际上是 Cauchy − Leray 形式乘以 $\exp < Q, \zeta - z >$ 再加上“低阶奇性项”(即那些奇性 $< s, \zeta - z\rangle^{-(k+1)}$ 是较低阶的项).

注意当 $Q \equiv 0$，我们有

(4.10.11) $\quad N_t = - \exp t < s, \zeta - z > (t^{n-1} \omega'(s) \wedge \omega(\zeta - z) \wedge dt)$

(4.10.12) $\quad K = -(n-1)! \langle s, \zeta - z >^{-n} \omega'(s) \wedge \omega(\zeta - z)$

即 $K$ 恰好是 $-(n-1)!$ 乘以通常的 Cauchy − Leray 形式

由于 $A$ 是具有极大阶的全纯形式，所以 $dA = 0$，由此可知当 $\zeta \neq z$ 时 $dN = 0$；同时由(4.10.8)可知 $N'$ 关于 $d\zeta, dz$ 也是满的(阶是极大的)，所以有

(4.10.13) $\quad d_{\zeta,z} N_t = - d_{\zeta,z,t} N' = - d_t N'.$

对(4.10.9)在积分号下微分在 $D \times D$ 的对角线外面得到

(4.10.14) $$d_{\zeta,z}K=\int_0^\infty d_{\zeta,z}N_t=-\int_0^\infty d_tN'=N'|_{t=0}$$
$$=\exp<Q,\zeta-z>\omega(Q)\wedge\omega(\zeta-z)\xlongequal{\text{记}}P.$$

(当积分时我们把 $dt$ 放到最右边的位置). 注意 $P$ 不包含 $S$,因此由假设 $Q$ 关于 $z$ 是全纯的,所以 $P$ 不含有 $d\bar{z}$ 的项. $p$ 称为"**射影核**".

#### 4.10.3 Koppelman 公式和 $\bar{\partial}$ — 方程的解

在推导 Koppelman 公式之前我们先介绍两个引理

**引理 4.10.1** 对所有在 $C^n$ 中的 $z$ 的邻域中连续的 $(p,q)$ 型外微分式 $f(z)$,有

(4.10.15) $$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}f(\zeta)\wedge(K\bar{\zeta}-\bar{z})=C^{-1}_{p,q,n}f(z),$$

其中

(4.10.16) $$K(\bar{\zeta}-\bar{z})=-(n-1)!<\bar{\zeta}-\bar{z},\zeta-z>^{-n}\omega'(\bar{\zeta}-\bar{z})\wedge\omega(\zeta-z),$$

$C^{-1}_{p,q,n}$ 为一常数.

证明参考钟同德[1986] 命题 2.7.4.

**引理 4.10.2** 设 $D$ 为 $C^n$ 中的一域, $f$ 为 $(p,q)$ 型外微分式属于 $C^{(1)}(\bar{D})$, $\Phi$ 为一光滑 $(p,q)$ 形式在 $D$ 中有紧致支集,则有

(4.10.17) $$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\Phi\wedge f\wedge K(s)=C^{-1}_{p,q,n}\int_D\Phi\wedge f,$$

其中

(4.10.18) $$K(s)=-(n-1)!(\exp<Q,\zeta-z>)\langle s,\zeta-z>^{-n}\omega'(s)\wedge\omega(\zeta-z).$$

$S$ 满足条件(4.10.5).

**证明** 由于 $K(s)$ 可以写成

(4.10.19) $$K(s)=-(n-1)!\langle s,\zeta-z>^{-n}\omega'(s)\wedge\omega(\zeta-z)$$

$$+ 0(|\zeta - z|^{2-2n}),$$

所以只要对 $Q \equiv 0$ 的情形进行证明就行了. 我们不妨假设 $<s, \zeta - z>> 0$, 当 $\zeta \neq z$, 否则我们可将 $s$ 代以 $S \dfrac{\overline{<s, \zeta - z>}}{|\langle s, \zeta - z\rangle|}$, 这并不会改变核(参考后面的引理 4.10.4). 我们仍然有 $ds = 0(1)$.

命 $b = \bar{\zeta} - \bar{z}$ 为"Bochner — Martinelli 截面", 并命 $s_\lambda = \lambda s + (1 - \lambda)b, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 构造新的核

(4.10.20) $H = -(n-1)! < \lambda s + (1-\lambda)b, \zeta - z >^{-n} \omega'(\lambda s + (1-\lambda)b) \wedge \omega(\zeta - z)$.

容易证明当 $\zeta \neq z$ 时, $dH = 0$.

对积分

(4.10.21) $I_\varepsilon = \int_{\partial(\{|\zeta - z| = \varepsilon\} \times [0,1])} \Phi \wedge f \wedge H$

应用 Stokes 公式, 得到

(4.10.22) $I_\varepsilon = \int_{\{|\zeta - z| = \varepsilon\} \times [0,1]} d(\Phi \wedge f) \wedge H.$

另一方面, 由于 $\{|\zeta - z| = \varepsilon\}$ 的边界是零(记住 $\Phi$ 有紧致支集), 我们有

(4.10.23) $I_\varepsilon = \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \Phi \wedge f \wedge K(s) - \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \Phi \wedge f \wedge K(b)$, 其中 $K(s)$ 和 $K(b)$ 分别(4.10.18) 和(4.10.16) 所定义的核.

注意(4.10.22) 中只有 $H$ 中含有 $d\lambda$ 的项出现. 这表示

$$|H| \leqslant \left( \frac{|s_\lambda|(|s| + |b|)}{(\lambda\langle s, \zeta - z> + (1 - \lambda)|\zeta - z|^2)^n} = 0(|\zeta - z|^{2-2n}) \right).$$

由于 $\{|\zeta - z| = \varepsilon\}$ 的面积测度为 $0(\varepsilon^{2n-1})$, 我们有 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = 0$. 因此由(4.10.23) 可知等式(4.10.17) 只要对 $s = b = \bar{\zeta} - \bar{z}$ 的情形证明, 而这由引理 4.10.1 立即可得. □

**注:** 本引理的证明还可以参考后面的引理 4.15.4, 那里给出了一个直接证明的方法.

**定理 4.10.1**(Koppelman 公式) 命 $f$ 为属于 $C^{(1)}(\bar{D})$ 的 $(p,q)$ 形式,那末

(4.10.24)
$$f = C_{p,q,n}\left\{ \int_{\partial D} f \wedge K_{p,q}(-1)^{p+q+1} \left(\int_D \bar{\partial} f \wedge K_{p,q} - \bar{\partial}_z \int_D f \wedge K_{p,q-1}\right)\right\}$$

当 $q > 0$,又

(4.10.25)
$$f = C_{p,o,n}\left\{ \int_{\partial D} f \wedge K p,o + (-1)^{p+1}\int_D \bar{\partial} f \wedge K_{p,o} - \int_D f \wedge p_{p,o}\right.$$

当 $q = 0$. 在此 $K_{p,q}$ 为 $K$ 的关于 $z$ 是 $(p,q)$ 次的,关于 $\zeta$ 是 $(n-p,n-q-1)$ 次的分量,对于 $p$ 有类似的说法.

**证明** 命 $\Phi$ 为一光滑 $(p,q)$ 形式在 $D$ 中有紧致支集. 我们要证明积分 $\int_D \Phi \wedge f$ 等于(4.10.24)(或(4.10.25))的右端对于 $\Phi$ 的积分,我们可以将 $K_{p,q}$(或者 $P_{pq}$ 代以 $K$(代以 $P$),由于其它分量不起作用. 命

$$D_\varepsilon = D \times D - \{(\zeta,z) \in D \times D; |\zeta - z| < \varepsilon\},$$

并考虑积分

$$\int_{\partial(D\times D)} \Phi(z) \wedge f(\zeta) \wedge K(\zeta,z) = I.$$

如果 $\varepsilon$ 和从 Supp$\Phi$ 到 $\partial D$ 的距离比较足够小,我们可以应用 Stokes 定理到 $D\varepsilon$ 并得到

(4.10.26)
$$I = \int_{D_\varepsilon} d\Phi \wedge f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{D_\varepsilon} \varphi \wedge df \wedge K + \int_{D_\varepsilon} \Phi \wedge f \wedge p + \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \Phi \wedge f \wedge K.$$

由(4.10.7)容易看到所有形式 $a_k$ 和 $\omega'(s)$ 的系数都是 $O(|s|) = 0(|\zeta - z|)$. 因此根据(4.10.5),对 $\Phi$ 的支集的所有的 $z$ 一致地有

$$K = O(|s|/|\langle s,\zeta - z\rangle|^n) = 0(|\zeta - z|^{1-2n}).$$

因此(4.10.26)中的前面三项积分，当$\varepsilon\to 0$时是绝对可积的．要想知道第四项积分的性态，我们必须先对$K$进行更仔细的研究．

由(4.10.7)可知

$$K=-(n-1)!(exp\langle Q,\zeta-z\rangle)\langle s,z-\zeta\rangle^{-n}\omega'(s)\wedge\omega(\zeta-z)+T_1, \tag{4.10.27}$$

其中$T_1$的系数是$O(|\zeta-z|^{2-2n})$．(4.10.27)的第一项可写成

$$-(n-1)!\langle s,\zeta-z\rangle^{-n}\omega'(s)\wedge\omega(\zeta-z)+T_2, \tag{4.10.28}$$

其中$T_2=O(|\zeta-z|^{2-2n})$．因此，计算

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\Phi\wedge f\wedge K$$

时，可以用(4.10.28)中的第一项，即经典的 Cauchy — Leray 形式乘以一常数，代替$K$．但由引理 4.10.2 知道上述积分等于$C_{p,q,n}^{-1}\int_D\Phi\wedge f$．

最后关于变量$z$应用 Stokes 公式得到

$$\int_{D\times D}d\Phi\wedge f\wedge K=(-1)^{p+q+1}\int_D\Phi\wedge dz\int_D f\wedge K.$$

并且要注意我们可以将$d$代以$\bar\partial$，因为$K$中关于$d\zeta$和$dz$一起的次数至少是$n$，对$\Phi\wedge f$也是这样·整理后即得

$$\int_D\Phi\int_{\partial D}f\wedge K=\int_D\Phi\wedge(-1)^{p+q}\{\int_D\bar\partial f\wedge K-\bar\partial_z\int_D f\wedge K\}+\int_D\Phi\wedge\int_D f\wedge p+C_{p,q,n}^{-1}\int_D\Phi\wedge f.$$

注意当$q>0$时$p_{p,q}=0$，这就完成了定理 1 的证明．

象通常一样由 Koppelman 公式可以得到．

**定理 4.10.2** 假设$S$满足条件(4.10.5)和(4.10.6)，又$f$是一$(p,q)$形式$(q>1)$，它的系数属于$C^{(1)}(\bar D)$，使得$\bar\partial f=0$．那末

(4.10.29) $$u = (-1)^{p+q} C_{p,q,n} \int_D f \wedge K_{p,q-1}$$
是方程 $\bar{\partial} u = f$ 的解.

**证明** 由于 $S(\zeta,z)$ 当 $\zeta \in \partial D$ 固定时,关于 $z \in D$ 是全纯的,所以 $K_{p,q}$ 到 $\zeta \in \partial D$ 的拉回,当 $q \geqslant 1$ 时是零,因此由 Koppelman 公式立得定理. □

由上述证明可知我们的核

(4.10.30) $$K = -(n-1)!e^{\langle Q,\zeta-z\rangle} K' + T$$

其中

(4.10.31) $$K' = \langle s,\zeta - z\rangle^{-n} \omega'(s) \wedge \omega(\zeta - z)$$

是经典的 Cauchy — Leray 核或者称为 Henkin — Ramirez 核,$T$ 是低阶奇性项. 这种形式的权因子在许多情形都显得太特殊了. 在下一段当我们把 $K$ 写得更明确时,就可以看出指数函数可以用全纯函数来代替.

### 4.10.4 形式更一般的权因子

**定义 4.10.1** (反导数) 设有算子及外微分式

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}, \varphi = f(z) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

定义

$$\theta \lrcorner \varphi = \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} f(z) (\xi_{i_l} - z_{i_l}) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge [dz_{i_l}] \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

$\lrcorner$ 定义一个收缩运算,是线性的,称为反导数(antiderivation).

**引理 4.10.3** 命 $(a_1,\cdots,a_l)$ 为复数并记

$$\omega'(a,\zeta) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_j \bigwedge_{i\neq j} d\xi_i,$$

那末

(4.10.32) $\quad \omega'(a,\xi) \wedge \omega(\eta) = C_n \sum a_j d\eta_j \wedge (\sum d\xi_j \wedge d\eta_j)^{n-1}$

其中

$$C_n = (-1)^{n(n-1)/2}/(n-1)!$$

**证明** 定义一向量 $a = \sum a_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$. 那末由定义 4.10.1, $\omega'(a,\xi) = a \rfloor \omega(\xi)$, 但是

$$n!\omega(\xi) \wedge \omega(\eta) = (-1)^{n(n-1)/2}(\sum d\xi_j \wedge d\eta_j)^n,$$

两边对 $a$ 作用运算 $\rfloor$, 则

$$\begin{aligned} n!\omega'(a,\xi) \wedge \omega(\eta) &= n!a \rfloor \omega(\xi) \wedge \omega(\eta) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a \rfloor (\sum d\xi_j d\eta_j) \wedge (\sum d\xi_j \wedge d\eta_j)^{n-1} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} n \sum a_j d\eta_j \wedge (\sum d\xi_j \wedge d\eta_j)^{n-1} \end{aligned}$$

这样就完成了证明. □

前面说过 $K = \int_0^\infty N_t$, 其中

$N = exp(< Q,\zeta - z > + t < s,\zeta - z > \omega(Q + ts) \wedge \omega(\zeta - z)$

又 $N_t$ 是 $N$ 中包含 $dt$ 的分量. 我们将由 $Q$ 和 $S$ 构成的 (1,0) 形式.

$$\sum_{j=1}^{n} s_j d(\zeta_j - z_j) \text{ 和 } \sum_{j=1}^{n} Q_j d(\zeta_j - z_j)$$

仍然分别记为 $S$ 和 $Q$.

**注意**

$$\begin{aligned} N_t = \exp(< Q,\zeta - z > + t < s,\zeta - z >)dt \\ \wedge\ \omega'(s,Q + ts) \wedge \omega(\zeta - z), \end{aligned}$$

因此由引理 4.10.3 得到

$N_t = C_n\exp(< Q,\zeta - z > + t < s,\zeta - z\rangle)dt \wedge s \wedge (dQ + tds)^{n-1}$

$$= C_n \exp(< Q, \zeta - z > + t < s, \zeta - z > dt \wedge s$$
$$\wedge \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (dQ)^k \wedge (ds)^{n-1-k} t^{n-1-k}.$$

再由 $K$ 的定义就得到

$$(4.10.33) \quad K = -C_n \exp < Q, \zeta - z > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} \frac{s \wedge (dQ)^k \wedge (ds)^{n-1-k}}{< s, \zeta - z >^{n-k}}$$

其相应的"射影核"为

$$(4.10.34) \qquad p = \exp < Q, \zeta - z > \omega(Q) \wedge \omega(\zeta - z) = (-1)^{n(n-1)/2}/n! \exp < Q, \zeta - z > < dQ >^n.$$

注意，由于我们只对 $d\zeta$ 和 $dz$ 的 $n$ 次分量有兴趣，因此我们可以将 (4.10.33) 和 (4.10.34) 中的 $d$ 用 $\bar{\partial}$ 代替.

**引理 4.10.4** 命 $\varphi: \overline{D} \times \overline{D} \to C \backslash \{0\}$ 为任意 $C^{(1)}$ 类函数，那么在 (4.10.33) 中如果 $s$ 用 $\varphi s$ 代替结果不变，即得到相同的核.

**证明** 由于 $s \wedge s = 0$，所以

$$\varphi s \wedge (d\varphi s)^j = \varphi s \wedge (d\varphi \wedge s + \varphi ds)^j = \varphi^{j+1} s \wedge (ds)^j,$$

引理证明. □

引理 4.10.4 表明核 $K$ 关于 $S$ 具有齐次性质，所以可以取消前面的假设 $Re < s, \zeta - z > < 0$.

以下我们寻找更一般的权因子，将 (4.10.33) 中的 $Q$ 用 $\lambda Q$ 代替，其中 $\lambda$ 是一正参数，并将结果记为 $K^{(\lambda)}$. 命 $g$ 为一 $[0. \infty]$ 上的函数甚至是广义函数，并命

$$\widetilde{K} = \int_0^\infty K^{(\lambda)} e^{-\lambda} g(\lambda) d\lambda / a$$

其中 $a = \int_0^\infty e^{-\lambda} g d\lambda$，当然我们要假设积分收敛并且 $a \neq 0$. 命

$$G(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} g(\lambda) d\lambda$$

为 $g$ 的 Laplace 变换，并正规化后使得 $a = G(1) = 1$. 那末由 (4.10.33) 得到

$$(4.10.35)\quad \widetilde{K}=-(-1)^k C_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} G^{(k)}(\langle Q, z-\zeta\rangle+1) \frac{s \wedge (dQ)^k \wedge (ds)^{n-1-k}}{< s, \zeta - z >^{n-k}},$$

同样的办法可以定义 $\widetilde{p}$，由(4.10.33)得到

$$(4.10.36)\quad \widetilde{p}=(-1)^n(-1)^{n(n-1)/2}/n!G^{(n)}(\langle Q, z-\zeta\rangle+1)(dQ)^n.$$

反之，假设 $G$ 是包含在映射 $(\zeta,z)\to\langle Q,z-\zeta\rangle+1$ 下 $\overline{D}\times\overline{D}$ 的象是一个单连通区域上的一个复变量的全纯函数，并假设 $G(1)=1$. 那末我们可以用(4.10.35)和(4.10.36)来定义 $\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{P}$. 由此可以得到

**定理 4.10.3** 设 $G$ 是上述定义的全纯函数，那末定理 4.10.1 的 Koppelman 公式中的 $K$ 和 $P$ 分别用 $\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{P}$ 代替时仍然成立.

**证明** 当 $G$ 是一漂亮的整函数的情形，例如是一多项式，由以上所说是很明显的. 即如我们取 $g$ 为在原点的 Dirac 测度的导数的组合，并且对每一 $K^{(\lambda)}$ 应用 Koppelman 公式. 一般的情形立可得知，由于 $G$ 在

$$(\zeta,z)\to\langle Q,z-\zeta\rangle+1$$

的象上可以用多项式一致逼近. 当然也可通过直接计算 $\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{P}$ 满足所要求的等式，然后重复 Koppelman 公式的证明. □

由于核 $K$ 是上述构造当 $G(\alpha)=exp(1-\alpha)$ 时的特殊情形，我们可以省掉记号"～"，而把(4.10.35)和(4.10.36)中的核简记为 $K$ 和 $P$.

对 $Q$ 和 $G$ 的每一个选 择定理 4.10.3 都给出 $\bar{\partial}-$ 方程的的解和全纯函数的表达式(假设 $s$ 满足(4.10.5)和(4.10.6)).

由于核 $K$ 具有一般形式的权因子，所以有很大的选择自由度，在多复变数的内插和除法等问题上有许多应用，例如参阅 B。Berndtson [1983](Math. Ann. 263. 399 — 418).

王小芹[1985]就用上述B. Berndtsson和 M. Anderson[1982]的方法拓广了 R. Harvey 和 J. Polking[1979] 的结果得到 Canchy — Riemann 方程的具有权的基本解.

## §4.11 Stein 流形　凝聚解析层

**定义 4.11.1** (Stein 流形) 命 $M$ 为一 $n$ 维复流形,$A = A(M)$ 为 $M$ 上的全纯函数族. $M$ 称为 *Stein* 流形,如果它满足下列三个条件:

Ⅰ)$M$ 是全纯凸的,即对 $M$ 中任一紧集 $K$,

$$\hat{K}_A = \{z \in M \mid |f(z)| \leqslant \sup_K |f|, \forall f \in A(M)\}$$

也是 $M$ 中的紧集;

Ⅱ)$M$ 的全纯函数分离 $M$ 上的点,即对 $\forall z, w \in M, z \neq w, \exists f \in A(M)$,使 $f(z) \neq f(w)$;

Ⅲ)$M$ 上的全纯函数可给出 $M$ 的局部坐标,即对 $\forall z \in M$, $\exists f_1, \cdots, f_n \in A(M)$,$(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $z$ 的一个邻域的局部坐标.

**注:**　H. Grauert[1958] 有一个深刻的定理,即如果 $M$ 是一复流形具有强多次调和穷竭函数,那末 $M$ 是 Stein 的,但是只要用条件 Ⅰ) 和 Ⅱ) 就可以证明 Stein 流形有一强多次调和穷竭函数. 因此由 Grauert 定理可知在 Stein 流形的定义中条件 Ⅲ) 是多余的.

定义中的条件 Ⅰ) 是 $C^n$ 中域的全纯凸的定义的拓广,条件 Ⅱ),Ⅲ) 对 $C^n$ 中的域是自然成立的,所以显然 $C^n$ 就是一个 Stein 流形. 在 Stein 流形上研究多元复分析在某种意义上自然比 $C^n$ 空间更一般些. 此外,在 Stein 流形上有很多非常值的全纯函数,这也是在 Stein 流形上研究多元复变函数论的很自然的道路。

由定义中的条件 Ⅱ) 知道 Stein 流形一定是非紧的,因为对一个紧致复流形,在整个复流形上有定义的全纯函数一定在某点达到极大模,但由全纯函数的极大模原理,只有常函数才可能,而这时条件 Ⅱ) 不满足.

为了后面的应用，在我们介绍凝聚解析层的概念和一些重要定理，这些定理的证明可以在 H. Cartan, Sémainaires E. N. S. 1951/52 中找到，也可在 H. Grauert, &R. Remmert[1984], R. C. Gunning & H. Rossi[1985], L. Hörmander[1966] 等书中找到.

关于层的基本概念我们在本书最后第六章介绍，为了避免一般层的抽象语言，在此我们只考虑全纯向量丛中全纯截面芽层的子层.

**定义 4.11.2** （全纯截面芽层）命 $M$ 为一复流形，$E$ 为 $M$ 上的一全纯向量丛. 我们记 ${}_M\vartheta^E$ 为映射，它将每一开集 $U \subseteq M$ 映为 $E$ 在 $U$ 上的全纯截面空间 ${}_M\vartheta^E(U)$. 我们也记 $\vartheta(U,E) := {}_M\vartheta^E(U)$. ${}_M\theta^E$ 称为 **$E$ 的全纯截面芽层**. 对乘积丛 $M \times C^N$ 我们记 ${}_M\vartheta^N := {}_M\vartheta^{M\times C^N}$ 及 ${}_M\vartheta^N(U) := {}_M\vartheta^{M\times C^N}(U)$.

**定义 4.11.3** （解析子层）映射 $F$ 将每一开集 $U \subseteq M$ 映为 $\vartheta(U,E)$ 的一子集 $F(U)$，称为 ${}_M\vartheta^E$ 的**解析子层**，如果满足下列条件：

（Ⅰ）对每一开集 $U \subseteq M$，$F(U)$ 是一 $\theta(U)$ 一模，即如 $f,g \in F(U)$ 及 $\alpha,\beta \in \vartheta(U)$，那末 $\alpha f + \beta g \in F(U)$，在此 $\vartheta(U)$ 为 $U$ 上的全纯函数构成的空间.

（Ⅱ）如果 $V \subseteq U \subseteq M$ 为开集，又 $f \in Q(U)$，那末 $f|_V \in F(V)$.

（Ⅲ）如果 $U_i \subseteq M$ 为开集，$f \in \vartheta(UV_i, E)$ 且 $f \in F(U_i)$，那末 $f \in F(UV_i)$.

**定义 4.11.4** （凝聚解析层）. ${}_M\vartheta^E$ 的解析子层 $F$ 称为**凝聚的**，如果对每一点 $z \in M$，存在 $z$ 的一个邻域 $U_z$ 和有限个 $f_1,\cdots,f_N \in F(U_z)$ 使得下列条件满足：如果 $\zeta \in U_z$，$V_\zeta$ 是 $\zeta$ 的一个邻域，又 $f \in F(V_\zeta)$，那末存在 $\zeta$ 的一个邻域 $W_\zeta \subseteq V_\zeta \cap U_z$ 和 $\psi_1,\cdots,\psi_N \in \vartheta(W_\zeta)$ 使得在 $W$ 上有 $f = \psi_1 f_1 + \cdots + \psi_N f_N$.

**定理 4.11.1** （Oka 定理） 命 $M$ 为复流形，$A$ 为一 $r \times s$ 矩阵，它的元素是 $M$ 上的全纯函数. 记 $\mathscr{K}_A$ 为 ${}_M\vartheta^S$ 的解析子层，它的定义为

$\mathscr{K}_A(U) := \{f \in \vartheta^S(U)$:在 $U$ 中 $Af = 0\}$,$U \subseteq M$ 是开的.那末 $\mathscr{K}_A$ 是凝聚的.

**定理 4.11.2** 命 $M$ 为一 Stein 流形,$E$ 为 $M$ 上的全纯向量丛,又命 $F$ 为 ${}_M\vartheta^E$ 的凝聚解析子层.

(Ⅰ)(Cartan **定理** $A$) 如果 $f \in F(U)$,其中 $U \subseteq M$ 是开的,那开对每一点 $z \in U$,可以找到有限个 $f_1, \cdots, f_N \in F(M)$ 以及 $z$ 的某一邻域 $V \subseteq U$ 中的全纯函数 $\psi_1, \cdots, \psi_N$ 使得在 $V$ 上有 $f = \psi_1 f_1 + \cdots + \psi_N f_N$。

(Ⅱ)(Cartan **定理** $B$) 对每一个开复盖 $\{U_j\}_{j\in J}$ 和使得在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 中 $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$ 对所以 $i、j、k \in J$ 的每一全纯截面系 $f_{i,j} \in F(U_i \cap U_j)$,$i, j \in J$,存在一全纯截面系 $f_j \in F(U_j)$,$j \in J$,使得在 $U_i \cap U_j$ 中 $f_{ij} = f_i - f_j$ 对所有 $i, j \in J$.

**定理 4.11.3** 命 $M$ 为一复流形,$E$ 为 $M$ 上的全纯向量丛,又 $F$ 为 ${}_M\vartheta^E$ 的一凝聚解析子层.那末对每一开集 $U \subseteq M$,$F(U)$ 为 Fréchet 空间 $\vartheta(U, E)$ 的一闭子空间具有在紧致子集上一致收敛的拓扑.

**凝聚解析层的例子**

**例** 1 命 $N$ 为复流形 $M$ 的闭复子流形.则

(4.11.1) $F_N(U) := \{f \in \vartheta(U): f(z) = 0$ 对 $z \in U \cap N\}$,$U \subseteq M$ 开的,定义 ${}_M\vartheta^1$ 的一解析子层 $F_N$ 是凝聚的.

证明只要适当选择局部全纯坐标并利用全纯函数的局部幂级数展开.

**例** 2 命 $M$ 为一复流形,又 $f = (f_1, \cdots, f_N) \in \vartheta^n(M)$.如果 $U \subseteq M$ 是开的,则记 $F_f(U)$ 为所有函数 $g \in \vartheta(U)$ 的空间,使得下列条件满足:对每一点 $z \in U$,有一 $z$ 的邻域 $V \subseteq U$ 和全纯函数 $g_j \in \vartheta(V)$ 使得在 $V$ 中有 $g = g_1 f_1 + \cdots g_N f_N$ · 由定义显然可知这样定义的 ${}_M\vartheta^1$ 的解析子层 $F_f$ 是凝聚的.$F_f$ 称为由 $f$ **生成的层**.

**例 3** 命 $M$ 为一复流形,$E$ 为一在 $M$ 是的全纯向量丛,又命 $f$:

$M \to E$ 为一全纯截面由 $E$ 是平凡局部全纯的，截面 $f$ 可以局部地表为一全纯函数向量，其中两个不同的表示是由一可逆全纯矩阵相联系. 因此象例 2 一样截面 $f$ 生成 ${}_M\vartheta^1$ 的一凝聚解析子层 $F_f$.

**推论 4.11.1** 命 $M$ 为一 Stein 流形，又命 $N$ 为 $M$ 的一闭复子流形. 那末对 $N$ 上的每一全纯函数，存在一 $M$ 上的全纯函数 $F$ 使得在 $N$ 上有 $F = f$.

**证明** 显然 $f$ 允许局部全纯开拓，即我们可以找到 $M$ 的一开复盖 $\{U_j\}$ 和函数 $F_j \in \vartheta(U_j)$ 使得在 $N \cap U_j$ 上，$F_j$. 于是 $F_i - F_j \in F_N(U_j \cap U_j)$（例 1）并且由定理 4.11.2（Ⅱ）我们可得 $H_j \in F_N(U_j)$ 使得在 $U_i \cap U_j$ 上 $F_i - F_j = H_j - H_j$. 在 $U_j$ 上置 $F: = F_j - H_j$，我们就得到要求的开拓 $F$. □

## § 4.12 全纯截面 $S(z,\zeta)$ 和权函数 $\varphi(z,\zeta)$

### 4.12.1 两个引理

**引理 4.12.1** 命 $M$ 为一 Stein 流形，$E, E'$ 为 $M$ 上的全纯向量丛，又命 $A: E \to E'$ 为向量丛的一内射（内射性表示对每一 $z \in M$，$E$ 和 $E'$ 在 $z$ 上的纤维之间的诱导线性映射的核是平凡的）全纯同态. 那末存在向量丛的一全纯同态 $A^{(-1)}: E' \to E$ 使得 $A^{(-1)}A = id$（$id$: = 恒同映射）.

我们先证明下面的局部结果：

**引理 4.12.2** 命 $L(N,M,C)$ 为复 $N \times M$ 矩阵的空间（$N$ = 行指标），又命 $GL(N,C)$ 为可逆复 $N \times N$ 矩阵的群. 如果 $U$ 是 $o \in C^n$ 的一邻域，又 $A: U \to L(N,M,C)$ 是一全纯映射使得秩 $A(0) = M$，那末存在 $O$ 的一个邻域 $V \subseteqq U$ 和全纯映射.

$A^{(-1)}: V \to L(M,N,C)$，$T: V \to GL(N,C)$ 使得对所有的 $z \in V$

（Ⅰ）$A^{(-1)}(z)A(z) = id_M$（$id_M$: = $M$ 阶的单位矩阵）.

（Ⅱ）$T(z)A(z) = A(0)$.

**证明** 由于秩 $A(0) = M$，存在一复 $M \times N$ 矩阵 $B_0$ 使得

$B_0A(O) = id_M$. 选择一 $O$ 的邻域 $V$ 这样小，使得对所有 $z \in V$，矩阵 $B_0A(z)$ 是可逆的. 置 $A^{(-1)}(z) := (B_0A(z))^{-1}B_0$ 及 $T(z) := id_N + (A(O) - A(z))A^{(-1)}(z)$. 那末（Ⅰ）和（Ⅱ）满足，并且收缩 $V$ 后，$T(z)$ 对所有的 $z \in V$ 是可逆的. □

**引理 4.12.1 的证明.** 由引理 4.12.2（Ⅰ）我们得到 $M$ 的一开复盖 $\{U_j\}$ 和全纯同态 $A_j^{(-1)}: E'|_{U_j} \to E|_{U_j}$ 使得在 $U$ 上 $FA = 0$. 由引理 4.12.2（Ⅱ）可知存在一 $M$ 上的全纯向量丛使得 $F$ 是这个丛的全纯截面芽层（定义 4.11.2）. 显然，$A_j^{(-1)} - A_i^{(-1)} \in F(U_i \cap U_j)$. 因此由定理 4.11.2（Ⅱ），我们可以找到 $H_j \in F(U_j)$ 使得在 $U_i \cap U_j$ 上 $A_j^{(-1)} - A_i^{(-1)} = H_i - H_j$. 置 $A^{(-1)} := A_j^{(-1)} + H_j$ 就完成了证明. □

### 4.12.2 复切丛和余切丛及其范数

设 $M$ 为一复 $n$ 维的复流形. $M$ 的**复切丛**记为 $T(M)$，**复余切丛**记为 $T^*(M)$. $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 关于投影 $M \times M \to M, (z,\zeta) \to z$ 的拉回(pull − back) 分别记为 $\widetilde{T}(M \times M)$ 和 $\widetilde{T}^*(M \times M)$. $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 在点 $z \in M$ 的纤维分别记为 $T_z(M)$ 和 $T_z^*(M)$.

$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 的全纯截面分别记为 $S(z,\zeta)$ 和 $S^*(z,\zeta)$，即有

$S(z,\zeta): M \times N \to \widetilde{T}(M \times M)$ 和

$S^*(z,\zeta): M \times N \to \widetilde{T}^*(M \times M)$.

选择 $M$ 的一组局部有限开复盖 $\{U_j\}$，使得对每一 $j$，有一组全纯坐标 $\varphi_j: U_j \to C^n$ 以及一全纯平凡化 $\psi_j: T(M)|_{U_j} \to U_j \times C^n$. 其次. 命 $\{x_j\}$ 为一从属于 $\{U_j\}$ 的 $C^\infty$ 单位分解. 那末每一 $T(M)$ 值形式 $S(z,\zeta)$ 在集合 $D \subseteqq M$ 上可以和一向量组 $\{S^{(j)}\}$ 等同，其中向量组 $\{S^{(j)}\}$ 由在 $\varphi_j(U_j \cap D) \subseteqq C^n$ 上的 $S_r^{(j)}$ 全纯函数的向量 $S^{(j)} = (S^{(j)}{}_1, \cdots, S^{(j)}{}_n)$ 所构成的. 定义 $S(z,\zeta)$ 的**范数**为

$$(4.12.1)\quad \|S(z,\zeta)\|:=\sum_j \chi_j(z)\sum_{r=1}^{n}\|S_r^{(j)}(\varphi_j(z))\| \text{ 对 } z\in D,$$

其中 $\|S_r^{(j)}(\varphi_j(z))\|$ 是系数为 $S_r^{(j)}(\varphi_j(z))$ 的向量的欧氏长度.

### 4.12.3 基本定理

**定理** 4.12.1 基本定理

设 $M$ 为一 Stein 流形,$T(M)$ 为 $M$ 的复切丛. 又设 $M$ 为一更大的 Stein 流形的相对紧开子集. 那末存在一全纯映射 $S:M\times M\to T(M)$ 和在 $M\times M$ 上的全纯函数 $\varphi$ 使得下列条件满足:

(Ⅰ) 对所有的 $z,\zeta\in M$,$S(z,\zeta)\in T_z(M)$(即 $S(z,\zeta)$ 是切丛 $T(M)$ 关于映射 $M\times M\to M,(z,\zeta)\to z$ 的拉回的截面).

(Ⅱ) 对每一个固定的 $z\in M$,$S(z,z)=0$,并且在 $\zeta=z$ 的某一邻域上映射 $S(z,\zeta):M\to T_z(M)$ 是双全纯的.

(Ⅲ) 对所有 $z\in M$,$\varphi(z,z)=1$.

(Ⅳ) 如果 $\mathscr{F}_s$ 是由 $S$ 生成的 ${}_{M\times M}\mathscr{O}$ 的解析子层(例3),那末 $\varphi\in\mathscr{F}_s(M\times M)\backslash\{(z,z):z\in M\})$.

(Ⅴ) 存在一整数 $\varkappa\geqslant 0$ 使得对 $T(M)$ 中的每一范数 $\|\cdot\|$,函数 $\varphi^{\varkappa}\|s\|^{-2}$ 在 $(M\times M)\backslash\{(z,z):z\in M\}$ 是 $C^{(2)}$ 的.(只要选择 $\varkappa\geqslant 9$).

**证明** 引进一全纯映射 $f:M\to C^N$(对某一大的但有限的 $N$)使得,对所有的 $z\in M$,$f$ 的 Jacobi 矩阵(关于局部坐标的)有极大秩. 由于 $M$ 是一更大的 Stein 流形的相对紧开子集,由 Stein 流形的定义这样的映射是存在的. 记 $F$ 为将 $T(M)$ 映入乘积丛 $M\times C^N$(它是局部由 $f$ 的 Jacobi 矩阵定义的)的全纯同态. 那末 $F$ 是内射,并且从引理 4.12.1 可得到一向量丛的全纯同态 $F^{(-1)}:M\times C^N\to T(M)$,使得在 $M$ 上 $F^{(-1)}F=id$,对 $z,\zeta\in M$,定义 $S(z,\zeta):=F^{(-1)}(z,f(\zeta)-f(z))$. 那末显然条件(Ⅰ)满足,并且由 Taylor 公式可知条件(Ⅱ)也满足.

现在构造函数 $\varphi$. 置 $\triangle := \{(z,z): z \in M\}$ 和

$$Y := \{(z,\zeta) \in M \times M: S(z,\zeta) = 0\} \backslash \triangle.$$

那末由条件(Ⅱ),$Y$ 是 $M \times M$ 的一闭子集,且开集 $U_{\triangle}: (M \times M)\backslash Y, U_Y := (M \times M)\backslash \triangle$ 构成 $M \times M$ 的开复盖. 由于 $\mathscr{F}_S$ 是凝聚的并且值是 1 的常值函数属于 $\mathscr{F}_S(U_{\triangle} \cap U_Y)$,从定理 4.11.2(Ⅰ)(Cartan 定理 $A$) 我们得到函数 $\varphi_Y \in \mathscr{F}_S(U_Y)$ 和 $\varphi_{\triangle} \in \mathscr{F}_S(U_{\triangle})$ 使得在 $U_{\triangle} \cap U_Y$ 中有 $1 = \varphi_Y - \varphi_{\triangle}$. 在 $U_Y$ 中置 $\varphi := \varphi_Y$ 及在 $U_{\triangle}$ 中置 $\varphi := 1 + \varphi_{\triangle}$,我们就得到函数 $\varphi \in \vartheta(M \times M)$ 满足条件(Ⅲ)和(Ⅳ).

最后剩下证明条件(Ⅴ). 考虑某些点 $z \in (M \times M)\backslash \triangle$ 并选择 $z$ 的一个领域 $U \subsetneqq (M \times M)\backslash \triangle$ 小到使 $T(M)$ 在 $U$ 上是平凡全纯的. 那末映射 $S$ 可以用 $U$ 上全纯函数的向量$(s_1, \cdots, s_n)(n = dim_C M)$ 表示. 在收缩 $U$ 后,我们可假设对某些 $\varphi_j \in \vartheta(U)$ 有 $\varphi = \varphi_1 s_1 + \cdots + \varphi_n s_n$(这可从 $\mathscr{F}_S$ 的定义得知). 在收缩 $U$ 后,表示对所有$(z,\zeta) \in U$ 存在一常数 $C < \infty$ 使得 $|\varphi(z,\zeta)| \leqslant C\|S(z,\zeta)\|$. 因此在 $U$ 中 $\varphi^9\|S\|^{-2}$ 是一 $C^{(2)}$ 类函数. □

**注意** 定理 4.12.1 中假设:"$M$ 为一更大的 Stein 流形的相对紧 开子集"可以不要,定理照样成立. 因为证明定理的关键是在于"引进一全纯映射 $f: M \to C^N$(对某一大的但有限的 $N$),使得对所有的 $z \in M$,$f$ 的 Jacobi 矩阵(关于局部坐标的)有极大秩",在取消上述假设后,这种全纯映射仍然可以证明它存在,而且可以选择 $f$ 为将双全纯映上到 $C^N$ 的某一闭复子流形的映射(例如参阅 R. C. Gunning & H. Rossi[1965] 或 L. Hörmander[1966]). 但是我们不需要这样一般化的定理,因为以后我们只将定理中的 $S(z,\zeta)$ 和函数 $\varphi(z,\zeta)$ 用在$\overline{D} \times \overline{D}$ 的某一领域中,其中 $D$ 是 Stein 流形的一相对紧开子集.

## § 4.13 Bochner — Martinelli 公式和 Leray 公式

### 4.13.1 记号和预备知识

命 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 和 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 为 $C^{(1)}$ 一流形 $M$ 上的复 $C^{(1)}$ — 函数集合. 定义

$$<v,u>=v_1u_1+\cdots+v_nu_n,$$

$$\omega(u)=du_1\wedge\cdots\wedge du_n,$$

$$\omega'(v)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\bigwedge_{s\neq j}dv_s \tag{4.13.1}$$

$$\Omega(v,u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{<v,u>^n}.$$

如果 $\zeta$ 表示 $M$ 上的变量而函数 $v_j$ 和 $u_j$ 还依赖于其它变量，则记为 $\omega_\zeta,\omega'_\zeta$ 和 $\Omega_\zeta$. 如果 $v_j$ 和 $u_j$ 中的独立变量不止一个，则这些独立变量都要标出. 以上形式在前面讲 $C^n$ 空间中的积分表示曾经多次用过，为了以后介绍 Stein 流形上积分表示时便于应用，下面我们列出这些形式的简单性质：

1. 形式 $\Omega(v,u)$ 是闭的，即

$$d\Omega(v(\zeta),u(\zeta))=0, \text{当} <v(\zeta),u(\zeta)>\neq 0. \tag{4.13.2}$$

**证明**　由于 $d\omega(u)=0$. 我们有

$$d\frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{<v,u>^n}$$

$$=\frac{d\omega'(v)\wedge\omega(u)}{<v,u>^n}-\frac{d<v,u>^n\wedge\omega' w(v)\wedge\omega(u)}{<v,u>^{2n}}.$$

但是 $dw'(v)=n\omega(v)$ 且

$$d<v,u>^n\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)$$

$$=n<v,u>^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_jdu_j+u_jdv_j)\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)$$

$$=n<v,u>^n\omega(v)\wedge\omega(u). \square$$

2. 如果 $D$ 是 $M$ 中的开集而函数 $u_j$ 是全纯的，则对 $D$ 上的每一连续可微函数 $f$ 有

(4.13.3) $$d(f\Omega(v,u)) = \bar{\partial} f \wedge \Omega(v,u).$$

**证明** 由考察次数可知 $\partial f \wedge \omega(u) = 0$，因此 $\partial f \wedge \Omega(v,u) = 0$. 再由(4.13.2)就得到(4.13.3). □

3. 如果 $D$ 是 $M$ 中的开集，则对 $D$ 上的每一复 $C^{(1)}$ — 函数 $\psi$，都有关系式

(4.13.4) $$\omega'(\psi v) = \psi^n \omega'(v)$$

和

(4.13.5) $$\Omega(\psi v,u) = \Omega(v,u).$$

关系式(4.13.5)说明 $\Omega(v,u)$ 关于 $v$ 是齐次的(参阅引理 4.10.4).

这个性质可由直接计算证明，或从下面的公式(4.13.8)得到.

下面的引理表明形式 $\omega'(v) \wedge \omega(u)$ 和 $\Omega(v,u)$ 具有不变性.

**引理 4.13.1** 设 $M$ 是复流形，对点 $z \in M$，$u$ 是取值于切空间 $T_z(M)$ 的映射 $v$ 是取值于余切空间 $T_z^*(M)$ 的映射. $D$ 是 $M$ 中的开集，$\Gamma = (r_{ij})$ 是一不依赖于 $\zeta \in D$ 的 $n \times n$ 方阵，使得 $\det\Gamma \neq 0$，命 $\Gamma_t = (r_{ji})$，那末

(4.13.6) $$\omega'(\Gamma_t^{-1}v) \wedge \omega(\Gamma u) = \omega'(v) \wedge \omega(u)$$

并且

(4.13.7) $$\Omega(\Gamma_t^{-1},v,\Gamma u) = \Omega(v,u).$$

**证明** 我们知道，当一 $n \times n$ 方阵的元素在一非交换 $C$ — 代数中时，其行列式可如下定义：

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

其中求和是展布在 $\{1,\cdots,n\}$ 的所有置换 $\sigma$ 上，又 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 表示 $\sigma$ 的符号差. 行运算行列式之间的通常关系在非交换的情形仍然成立. 因此象通常一样可以证明 $\det(\Gamma A) = \det\Gamma \cdot \det A$(虽然，一般来说，$\det(A\Gamma) \neq \det A \cdot \det\Gamma$. 由于形式 $\omega'(v)$ 可写成

$$(4.13.8)\qquad \omega'(v)=\frac{1}{(n-1)!}\det\begin{vmatrix} v_1 & dv_1 & \cdots & dv_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & \underbrace{dv_n & \cdots & dv_n}_{n-1} \end{vmatrix}$$

由此得 $\omega'(\Gamma_t^{(-1)}v)=(\det\Gamma)^{-1}\omega'(v)$. 由此和显然的关系式 $\omega(\Gamma u)=\det\Gamma\omega(u)$ 即得(4.13.7). □

以下我们假定 $\{(U_j,\varphi_j)\}$ 是 $M$ 的一固定全纯函数卡集使得对所有的 $j, U_j \subset\subset M$. 如果 $D\subseteqq M$ 是一开集，则记 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 在 $U$ 上的限制为 $T(D)$ 和 $T^*(D)$. 其次，命 $g_{ij}(z)=J_{\varphi_i o\varphi_j^{-1}}(z), z\in U_i\cap U_j$，其中 $J_{\varphi_i o\varphi_j^{-1}}(z)$ 是 $\varphi_i o\varphi_j^{-1}$ 在 $z$ 的 Jacobi 矩阵，易知在 $U_i\cap U_j\cap U_k$ 上有 $g_{ij}g_{jk}g_{ki}=I$，所以按 § 3.4 所说 $\{g_{ij}\}$ 是切丛 $T(M)$ 的连接函数，$\{(g_{ij}^t)^{-1}\}$ 是余切丛 $T^*(M)$ 的连接函数，其中 $g_{ji}{}^t$ 是 $g_{ij}$ 的转置. 现在固定全纯平凡化 $\psi_j: T(U_j)\to U_j\times C^n$ 和 $\psi_j^*: T^*(U_j)\to U_j\times C^n$ 使得

$$(z,(g_{ij}(z))\xi)=\psi_i o\psi_j^{-1}(z,\xi)$$

和

$(z,((g_{ij}^t)^{-1}(z))\xi)=\psi_i^* o(\psi_j^*)^{-1}(z,\xi)$ 对 $z\in U_i\cap U_j$ 和 $\xi\in C^n$

如果 $z\in U_j$ 和 $a\in T_z(M)$ $(a\in T_z^*(M))$. 那末具有 $\psi_j(a)=(z,a_j)$ $(\psi_j^*(a)=(z,a_j))$ 的向量 $a_j\in C^n$ 称为 $a$ **关于** $(U_j,\varphi_j)$ **的表示**. 如果 $z\in U_i\cap U_j, a\in T_z(M), b\in T_z^*(M)$ 且 $a_i,a_j,b_i,b_j$ 分别为 $a,b$ 关于 $(U_i,\varphi_i)$ 和 $(U_j,\varphi_j)$ 的表示，那末有

$$(4.13.9)\qquad a_i=g_{ij}(z)a_j \text{ 和 } b_i=(g_{ij}^t)^{-1}(z)b_j.$$

因此，下述定义是正确的.

**定义 4.13.1** 如果 $z\in M, a\in T_z(M)$ 和 $b\in T_z^*(M)$，则可任意选择一 $j$ 使 $z\in U_j$ 并定义

$$(4.13.10)\qquad \langle b,a\rangle := \langle b_j,a_j\rangle,$$

其中 $b_j$ 和 $a_j$ 是 $b$ 和 $a$ 关于 $(U_j,\varphi_j)$ 的表示.

现在命 $D\subseteqq M$ 为一开集，$N$ 为一实的 $C^{(1)}$ — 流形，并命 $a: D\times$

$N \to T(M)$ 和 $b: D \times N \to T^*(M)$ 为 $C^{(1)}$ — 映射，使得对所有的 $(z, y) \in D \times N$ 有 $a(z,y) \in T_z(M)$ 和 $b(z,y) \in T_z^*(M)$. 命 $a_j: (D \cap U_j) \times N \to C^n$ 和 $b_j: (D \cap U_j) \times N \to C^n$ 为 $a$ 和 $b$ 关于 $(U_j, \varphi_j)$ 的表示. 则由(4.13.9)，(4.13.8) 和引理 4.13.1 的证明可知

(4.13.11) $$\omega'_y(b_i(z,y)) \wedge \omega_y(a_i(z,y)) = \omega'_y(b_i(z,y)) \wedge \omega_y(a_j(z,y))$$
对 $z \in D \cap U_i \cap U_j$ 和 $y \in N$.

因此有下述定义

**定义 4.13.2** 如果 $D \subsetneqq M$ 是一开集，$N$ 为一实 $C^{(1)}$ 一流形，$a: D \times N \to T(M)$ 和 $b: D \times N \to T^*(M)$ 为 $C^{(1)}$ 一映射，使得对所有的 $(z,y) \in D \times N$ 有 $a(z,y) \in T_z(M)$ 和 $b(z,y) \in T_z^*(M)$. 命 $a_j: (D \cap U_j) \times N \to C^n$ 为 $a$ 和 $b$ 关于 $(U_j, \varphi_j)$ 的表示. 则可任意选择一 $j$ 使 $z \in D \cap U_j$ 并定义在 $D \times N$ 上的连续微分形式 $\omega'_y(b(z,y)) \wedge \omega_y(a(z,y))$ 为

(4.13.12) $$\omega'_y(b(z,y) \wedge \omega_y(a(z,y)) := \omega'_y(b_j(z,y)) \wedge \omega_y(a_j(z,y)),\text{对 } z \in D \cap U_j \text{ 和 } y \in N.$$

最后我们引进下述有关 $\overline{S}(z,\zeta)$ 的定义.

**定义 4.13.3** 引进一保持纤维的 $C^\infty$ 一映射

(4.13.13) $$\sigma: T(M) \to T^*(M)$$

它相应于 $C^n$ 中的映射

(4.13.14) $$z \to \bar{z},$$

使得满足下列条件：对所有 $a \in T(M)$，$<\sigma a, a> \geqslant 0$ 并且映射

(4.13.15) $$\|a\|_\sigma := (\langle \sigma a, a \rangle)^{\frac{1}{2}}, a \in T(M),$$

在 $T(M)$ 的每一纤维上定义一范数. 这样的映射 $\sigma$ 可以按下述方式定义：如果 $z \in U_j$，$a \in T_z(M)$ 且 $a_j$ 是 $a$ 关于 $(U_j, \varphi_j)$ 的表示，则记 $\sigma_j a$ 为 $T_z^*(M)$ 中的向量，它关于 $(U_j, \varphi_j)$ 的表示为 $\overline{a_j}$. 选择一从属于 $\{U_j\}$ 的 $C^\infty$ — 单位分解 $\chi_j$ 并定义

(4.13.16) $\sigma a := \sum_j \chi_j(z)\sigma_j a$，对 $a \in T_z(M)$ 和 $z \in M$.

并记

(4.13.17) $\overline{S}(z,\zeta) := \sigma s(z,\zeta)$

(这样 $\overline{S}(z,\zeta)$ 就可以代替 $C^n$ 中的映射 $\overline{\zeta} - \overline{z}$).

由于我们只对 $\overline{D}$ 上的函数的积分公式有兴趣，所以不失一般性，不妨假设 $M$ 是一更大的 Stein 流形的相对紧开子集. 这样我们就可应用定理 4.12.1 构造 Stein 流形上的积分公式了.

### 4.13.2 Leray 截面，对函数的积分 $B_{\partial D}$ 和 $L_{\partial D}$ 和对 1 − 形式的积分 $B_D$ 和 $R_{\partial D}$

由定理 4.12.1(V)，$\varphi^K/\|s\|^2$ 对所有 $z,\zeta \in M$ 和 $z \neq \zeta$ 是一 $C^{(2)}$ -- 函数. 所以对每一整数 $\gamma \geqslant nk$ 和每一固定的 $z \in M$，微分形式(参考(4.13.12))

$$\frac{\varphi^\gamma(z,\zeta)\omega'_\zeta(\overline{s}(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\|s(z,\zeta)\|_\sigma^{2n}}$$

对 $\zeta \in M\backslash z$ 是 $C^{(1)}$ 的，并且在 $\zeta = z$ 的奇点是 $2n-1$ 阶的，所以，对每一整数 $\gamma \geqslant nk$ 和 $D$ 上的每一有界 1 − 形式，我们可以定义

(4.13.18) $(B_D(\varphi^\nu,\overline{s},s)f)(z) :=$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\frac{\varphi^\nu(z,\zeta)\omega'_\zeta(\overline{S}(z,\zeta,))\wedge\omega_\zeta(S(z,\zeta))}{\|S(z,\zeta)\|_\sigma^{2n}}, z \in D,$$

再者，对每一整数 $\nu \geqslant nk$ 和每一 $\partial D$ 上的有界可测函数 $f$，我们定义

(4.13.19) $(B_{\partial D}(\varphi^\nu,\overline{s},s)f)(z):$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\frac{\varphi^\nu(z,\zeta)\omega'_\zeta(\overline{s}(z,\zeta))\wedge\omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\|s(z,\zeta)\|_\sigma^{2n}}, z \in D.$$

**定义 4.13.4** 关于 $(D,S,\varphi)$ 的 Leray **截面**定义为一数对 $(S^*,K^*)$，其中 $K^* \geqslant 0$ 是一整数，而 $S^*(z,\zeta)$ 是对 $\partial D$ 的其一邻域中的 $\zeta$ 和 $z \in D$ 定义的取值于 $T^*(M)$ 的 $C^{(1)}$ − 映射，使得满足下

列条件：

（Ⅰ）* 对所有 $z\in D$ 和 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta, s^*(z,\zeta)\in T_z^*(M)$.

（Ⅱ）* 对 $z\in D$ 和 $\zeta\in\partial D$ 有 $\langle S^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle\neq 0$ 和 $\varphi(z,\zeta)\neq 0$，又函数

$$\frac{\varphi^{K^*}(z,\zeta)}{\langle S^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle}$$

在 $D\times\partial D$ 的 $\subsetneqq D\times M$ 的某一邻域是 $C^{(1)}$ 的.（这表示，对每一 $K\subset\subset D$，存在 $\partial D$ 的一邻域 $V_K$ 使得这个函数对所有 $(z,\zeta)\in K\times V_K$ 是 $C^{(1)}$ 的）.

**例.** $(\bar{s},k)$ 是关于 $(D,S,\varphi)$ 的一个 Leray 截面.

如果 $(s^*,k^*)$ 是关于 $(D,S,\varphi)$ 的一个 Leray 截面，那末，对每一整数 $\nu\geqslant nk^*$ 和每一固定的 $z\in D$，微分形式（参考(4.13.12)）

$$\frac{\varphi^\nu(z,\zeta)\omega'_\zeta(s^*(z,\zeta))\wedge\omega(s(z,\zeta))}{<s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)>^n}$$

对 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta$ 是连续的. 所以，对 $\partial D$ 上的有界可测函数 $f$，我们可定义

(4.13.20)
$$L_{\partial D}(\varphi^\nu,s^*,s)f)(z):=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\frac{\varphi^\nu(z,\zeta)\omega'_\zeta(S^*(z,\zeta))\wedge\omega_\zeta(s(z,\zeta))}{<s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)>^n},z\in D$$

如果 $(s^*,k^*)$ 是关于 $(D,S,\varphi)$ 的一个 Leray 截面，那末命

(4.13.21)
$$t^*_{(s^*,\bar{s},s)}(z,\zeta,\lambda):=(1-\lambda)\frac{S^*(z,\zeta)}{\langle S^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle}+\lambda\frac{\overline{S}(z,\zeta)}{\|S(z,\zeta)\|_\sigma^2}.$$

由定理 4.12.1 中的条件 $(V)$ 和 Leray 截面定义中的条件（Ⅱ）*，则对每一固定的 $z\in D$，映射

$$\varphi^{max(k,k^*)}(z,\zeta)t^*_{(s^*,\bar{s},s)}(z,\zeta,\lambda)$$

对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 和 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta$ 是 $C^{(1)}$ 的. 所以由(4.13.4)对每一整数 $\nu\geqslant\max(nk,nk^*)$ 和每一个固定的 $z\in D$，微分形式（参考

(4.13.12))

$$\varphi^{\nu}(z,\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*_{(s^*,\bar{s},s)}(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega_\zeta(S(z,\zeta))$$

对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 和 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta$ 是连续的.

如果$(s^*,k^*)$是关于$(D,s,\varphi)$的一Leray截面,那末,对每一整数 $\nu \geqslant (\max(nk,nk^*)$ 和在 $\partial D$ 上的每一有界的 $1-$ 形式 $f$,我们定义

(4.13.22) $$(R_{\partial D}(\varphi^{\nu},s^*,\bar{s},s)f)(z):=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\varphi^{\nu}(z,\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega_\zeta(s(z,\zeta)),z\in D,$$

其中 $t^*=t^*_{(s^*,\bar{s},s)}$.

### 4.13.3 历史回顾

现在我们再说明一下构造Stein流形上的积分公式的思想和一些历史情况. 命 $M$ 为一复 $n$ 维的Stein流形,$D\subset\subset M$ 是一具有光滑边界的开集. 例如考察全纯函数的Bochner — Martinelli公式(4.1.1). 那末问题是用什么去代替映射 $\zeta-z$?首先考虑这种情形,存在一将 $M\times M$ 映入到 $C^n$ 的映射 $u(z,\zeta)$ 使得满足下列两条件:

(1) 如果 $\zeta\neq z$,$u(z,\zeta)\neq 0$;

(2) 对每一固定点 $z\in M$,映射 $u(z,\cdot)$ 在 $z$ 的某一邻域是双全纯的,其中 $u(z,z)=0$.

那末 $u$ 可以用来代替 $\zeta-z$,并且,象(4.1.1)的情形一样,人们可以去证明,对 $\bar{D}$ 某一邻域中的全纯函数 $f$ 有

(4.13.23) $$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}f(\zeta)\frac{\omega'_\zeta(\overline{u(z,\zeta)})\wedge\omega_\zeta(u(z,\zeta))}{|u(z,\zeta)|^{2n}},z\in D.$$

然而,这样的映射 $u$ 不一定存在. 而且,如果 $M$ 不是平行的,那末甚至仅仅要求满足(2)的映射 $u$ 也不一定存在(这可从

Schneider[1970] 的结果知道).

为了避免这个困难. 1974 年 A. Dynin 提出利用取值于 $M$ 的切从 $T(M)$ 的全纯映射 $S(z,\zeta)$(参阅 4.12.2 段) 使得对所有的$(z,\zeta)\in M\times M$, $S(z,\zeta)\in T_z(M)$ 并且满足下列的条件:(1) 对 $z\neq\zeta$, $s(z,\zeta)\neq 0$;(2) 对每一个固定的 $z\in M$, $s(z,\cdot)$ 在 $z$ 的某一邻域是双全纯的,其中 $s(z,z)=0$. 容易找到一保持纤维的 $C^\infty$ 映射,将复切丛映上到 $M$ 的复余切丛 $T^*(M)$,使得 $\|a\|: <\sigma a,a>^{\frac{1}{2}}, a\in T(M)$ 在 $T(M)$ 的纤维中定义一范数,其中 $<b,a>$ 是余向量 $b\in T_z^*(M)$ 在 $a\in T_z(M)$ 的值(参阅 4.12.2 和 4.13.1 段). 再者可以证明形式 $\omega'_\zeta(\sigma s(z,\zeta))\wedge\omega_\zeta(s(z,\zeta))$ 具有不变性(参阅 4.13.1 段)(但是形式 $\omega'_\zeta(\sigma s(z,\zeta))$ 和 $\omega_\zeta(s(z,\zeta))$ 对局部坐标的选择不能独立地定义). 至此人们可以去证明,对 $\overline{D}$ 的 某一邻域上的每一全纯函数 $f$ 有

$$(4.13.24)\qquad f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}f(\zeta)\frac{\omega'_\zeta(\sigma s(z,\zeta))\wedge\omega(s(z,\zeta))}{<\sigma s(z,\zeta),\zeta(z,\zeta)>^n},z\in D.$$

可惜的是,Dynin 的这个漂亮方法一般无法作出,因为这样的映射 $s(z,\zeta)$ 仍然不一定存在(仍然可以从 Schneider[1970] 的结果知道. 注意存在这样的映射 $S(z,\zeta)$ 的障碍纯粹是拓扑的,详细情况参阅 G. M. Henkin & J. Leiterer[1981] 和 J. Leiterer[1977]. 本书介绍的构造 Stein 流形上的积分公式的方法是 G. M. Henkin 和 J. Lerterer 发现的(G. M. Henkin & JLeiterer[1981][1983]). 他们的方法是综合 Dynin 的思想和 E. Bishop(E. Bishop[1961] 定理 7) 的思想得到的. 他们构造一映射 $S(z,\zeta)$ 满足条件(2)(而条件(1) 可以不满足),并且由凝聚解析层理论的 Cartan 定理 $B$,找到 $M\times M$ 上的一全纯函数 $\varphi(z,\zeta)$ 和一整数 $\chi\geqslant 0$,使得对所有的 $z\in M$, $\varphi(z,z)=1$,并且对所有的 $z\neq\zeta$, $\varphi^K(z,\zeta)/<\sigma s(z,\zeta),s(z,\zeta)>$ 是光滑的(参阅定理 4.12.1). 然后. 对每一整 $v\geqslant 2nk$,人们可以证明,对 $\overline{D}$

的某一邻域上的全纯函数 $f$ 有

(4.13.25)

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{2n}}$$

$$\int_{\partial D}f(\zeta)\frac{\varphi^{v}(z,\zeta)\wedge\omega'_{\zeta}(\sigma s(z,\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(s(z,\zeta))}{\langle\sigma s(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle^{n}},z\in D$$

(参阅定理 4.13.1 后面的推论 4.13.1). 在此函数 $\varphi^{v}(z,\zeta)$ 的作用是去掉核

$$\frac{\omega'_{\zeta}(\sigma s(z,\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(s(z,\zeta))}{<\sigma s(z,\zeta),s(z,\zeta)>^{n}}$$

的奇点. 注意如果这样的奇点不存在,那末由于 $\varphi(z,\zeta)$ 关于 $\zeta$ 是全纯的并且 $\varphi(z,z)=1$,由(4.13.24) 和(4.13.25) 可知这个因子并不改变积分的数值

## 4.13.4 Bochner — Martinelli 公式

**引理 4.13.2** 命整数 $v\geqslant 2kn$,那末

(4,13.26)
$$\int_{\zeta\in\partial D}\frac{\varphi^{v}(z,\zeta)w'_{\zeta}(\bar{s}(z,\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(s(z,\zeta))}{\|s(z,s)\|_{o}^{2n}}=\frac{2\pi i}{(n-1)!},z\in D.$$

**证明** 固定点 $z\in D$,设$\{(U_j,\varphi_j)\}$ 为 $M$ 的坐标卡集,选择 $U_{j_0}$ 使 $z\in U_{j_0}$,设 $v(\zeta)$ 和 $u(\zeta)$ 分别为 $\bar{s}(z,\zeta)$ 和 $s(z,\zeta)$ 关于$(U_{j_0},\varphi_{j_0})$ 的表示,那末

$\omega'_{\zeta}(\bar{s}(z,\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(s(z,\zeta))=\omega'_{\zeta}(v(\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(u(\zeta))$ 现在问题变为要证明

$$I:=\int_{\zeta\in\partial D}\varphi^{v}(z,\zeta)\frac{\omega'_{\zeta}(v(s))\wedge\omega_{\zeta}(u(\zeta))}{<v(\zeta),u(\zeta)>^{n}}=\frac{(2\pi i)^{n}}{(n-1)!}.$$

对 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,定义

$$\eta(\zeta,\lambda)=\varphi^{k}(z,\zeta)\left[(1-\lambda)\frac{<v(\zeta),u(\zeta)>\overline{u(\zeta)}}{|u(\zeta)|^{2}}+\lambda v(\zeta)\right]$$

和

$$\Omega(\zeta,\lambda):=\varphi^{\nu}(z,\zeta)\frac{w'_{(\zeta,\lambda)}(\eta(\zeta,\lambda))\wedge\omega'_{\zeta}(u(\zeta))}{<\eta(\zeta,\lambda),u(\zeta)>^{n}}$$

由于,对某些 $\alpha>0,|u(\zeta)|\geqslant\alpha\|s(z,\zeta)\|_{\lambda}$,映射 $\eta(\zeta,\lambda)$ 在 $\partial D$ 的某一邻域是 $C^{(1)}$ 的由于 $\langle\eta(\zeta,\lambda),u(\zeta)\rangle=\varphi^{k}(z,\zeta)<v(\zeta),u(\zeta)>=\varphi^{K}(z,\zeta)\|\zeta(z,\zeta)\|^{2}$ 以及 $\nu\geqslant 2nk$,可知 $\Omega(\zeta,\lambda)$ 对 $\partial D$ 的某一邻域中的 $\zeta$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 是连续的,由于 $\varphi(z,\zeta)$ 是全纯的,由 (4,13,2) 可知 $d_{(\zeta,\lambda)}\Omega\,\zeta,\lambda=0$ 所以 Stokes 公式给出

(4,13,27) $$\int_{\partial D\times 1}\Omega(\zeta,\lambda)=\int_{\partial D\times 0}\Omega(\zeta,\lambda)$$

注意到关系式 $\eta(\zeta,0)=\varphi^{k}(z,\zeta)(<v(\zeta),u(\zeta)>/|u(\zeta)|^{2})\overline{u(\zeta)}$ 和 $\eta(\zeta,1)=\varphi^{k}(z,\zeta)v(\zeta)$,由(4,13,4) 和(4,13,5) 我们得到

$$\Omega(\zeta,\lambda)|_{\lambda=0}=\varphi^{\nu}(z,\zeta)\frac{\omega'_{\zeta}\overline{(u(\zeta))}\wedge\omega_{\zeta}(u(\zeta))}{|u(\zeta)|^{2n}}$$

和

$$\Omega(\zeta,\lambda)|_{\lambda=1}=\varphi^{\nu}(z,\zeta)\frac{\omega'_{\zeta}(v(\zeta))\wedge\omega_{\zeta}(\omega(\zeta))}{<v(\zeta),u(\zeta)>^{n}}.$$

因此(4,13.27) 可以写成

(4.13.28) $$I=\int_{\zeta\in\partial D}\varphi^{\nu}(z,\zeta)\frac{\omega'_{\zeta}\overline{(u(\zeta))}\wedge\omega_{\zeta}(u(\zeta))}{|u(\zeta)|^{2n}}$$

由定理 4,12,1 条件$(ii)$,我们可选择 $z$ 的一具有光滑边界 $\partial W$ 的邻域 $W\subset\subset D$ 使得 $u$ 在 $z$ 某一邻域是双全纯的,由于 $\varphi$ 是全纯的,因此由(4,13,2) 可知对所有使 $u(\zeta)\neq 0$ 的,$\zeta\in M$,(4,13,28) 右端积分号下的形式是闭的,由于,$\nu\geqslant 2nk$,所以这个形式在 $M\backslash z$ 是 $C^{(1)}$ 的,我们知道这个形式在 $M\backslash z$ 是闭的. 因此,由 Stokes 公式,从(4.13.28) 可知

(4.13.29) $$I=\int_{\zeta\in\partial\omega}\varphi^{\nu}(z,\zeta)\frac{\omega'_{\zeta}\overline{(u(\zeta))}\wedge\omega_{\zeta}(u(\zeta))}{|u(\zeta)|^{2n}}$$

由于 $u$ 在 $\overline{w}$ 的一个邻域是双全纯的,我们得到

$$I=\int_{\zeta\in\partial(u(w))}\varphi^{\nu}(z,u^{-1}(\xi))\frac{\omega'(\bar{\xi})\wedge\omega(\xi)}{|\xi|^{2n}}$$

因此,由于函数 $u(\overline{w})\to\xi\to\varphi(z,u^{-1}(\xi))$ 是全纯的,并且 $\varphi(z,$

$u^{-1}(0)) = \varphi(z,z) = 1$(定理 4,12.1) 条件($iii$)),由 $C^n$ 中的 Bochner — Martinelli 公式(4.1.1) 可知 $I = (2\pi i)^n/(n-1)!$ ·□

**定理 4.13.1** (Bochner — Martinelli 公式) 命整数 $v \geqslant 2xn$,那末对每一在 $\bar{D}$ 上连续函数 $f$ 使得 $\bar{\partial} f$ 在 $\bar{D}$ 仍然连续的,有

(4,13.30) $f = B_{\partial D}f - B_D\bar{\partial} f$,在 $D$,

其中 $B_{\partial D} = B_{\partial D}(\varphi^v,\bar{s},s)$ 和 $B_D = B_D(\varphi^v\bar{s},s)$

**证明** 固定 $z \in D$,由于 $\varphi$ 是全纯的,则由(4.13.2) 和(4.13.3) 可知,对每一使 $s(z,\zeta) \neq 0$,,有关系式

(4.13.31) $$\bar{\partial}_\zeta\left[f(\zeta)\frac{\varphi^v(z,\zeta)\omega'_\zeta(\bar{s}(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\|s(z,\zeta)\|_\sigma^{2n}}\right]$$

$$= \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \frac{\varphi^v(z,\zeta)\omega'_\zeta(\bar{s}(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\|s(z,\zeta)\|_\lambda^{2n}}$$

由于 $v \geqslant nk$,所以形式 $\varphi^v\omega'_\zeta(\bar{s}) \wedge \omega_\zeta(s)/\|s\|^{2n}$
对 $\zeta \in M\backslash z$ 是 $C^{(1)}$ 的,(4.13.31) 对所有的 $\zeta \in D\backslash z$ 都成立,固定 $z$ 的邻域中的某一局部坐标并记 $E_\varepsilon$ 为关于这些坐标中心在半径为 $\varepsilon$ 的开球,取充份小的 $\varepsilon > 0$,,由(4.13.31) 和 Stokes 公式可知

(4.13.32) $$(B_{D\backslash E_\varepsilon}\bar{\partial} f)(z) = (B_{\partial D}f)(z) - (B_{\partial E_\varepsilon}f)(z).$$

应用公式(4.13.26) 得到

$$(B_{\partial E_\varepsilon}f)(z) = f(z) + (B_{\partial E_\varepsilon}(f - f(z))(z)$$

由于形式 $\omega'_\zeta(\bar{s}(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))/\|s(z,\zeta)\|^{2n}$ 在点 $\zeta = z$ 的奇点是 $2n-1$ 阶的,这表示当 $\varepsilon \to 0$ 时 $(B_{\partial E_\varepsilon}f)(z) \to f(z)$,因此当 $\varepsilon \to 0$ 时(4.13.32) → (4.13.30). □

当 $f$ 是在 $\bar{D}$ 的某一邻域中的全纯函数时,$\bar{\partial} f = 0$,由此立得

**推论 4.13.1** 对在 $\bar{D}$ 的某一邻域中的全纯函数 $f$,有

(4.13.33) $f = B_{\partial D}f$ 在 $D$

其中 $B_{\partial D} = B_{\partial D}(\varphi^v,\bar{s},s)$.

这就是 Stein 流形上的 Bochner — Martinelli 公式(参考定理 4.1.1). 也不难直接证明

### 4.13.5 Leray—Stokes 公式

**引理 4.13.3** 命$(s^*,x^*)$为关于$(D,s,\varphi)$的 Lreay 截面,又整数$v\geqslant\max(2nk,nk^*)$那末对第一在$\bar{D}$的连续的函数使得$\bar{\partial}f$在$\bar{D}$仍然是连续的,和对每一固定的$z\in D$,有

$$(4.13.34)\quad d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\varphi^v(z,\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda)\wedge\omega_\zeta(z,\zeta))]$$

$$=\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\varphi^v(z,\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda)\wedge\omega_\zeta(z,\zeta))$$

其中$0\leqslant\lambda\leqslant1$,$\zeta$在$\partial D$的某一邻域中,又$t^*=t^*(s^*,\bar{s},s)$(见(4.13.21)).

**证明** 由于方括中的形式包含一$(n,0)$次的因子,我们只要证明$(\bar{\partial}_\zeta+d\lambda)\Omega(\zeta,\lambda)=0$,

其中

$$\Omega(\zeta,\lambda):=\varphi^v(z,\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega_\zeta(z,\zeta)).$$

设$\{(U_j,\varphi_j)\}$全纯坐标卡集,选择$U_{j_0}$,使$z\in U_{j_0}$. 命$\mu:=\max(k,k^*)$,命$v(\zeta,\lambda)$和$u(\zeta)$分别为$\varphi^\mu(z,\zeta)t^*(z,\zeta,\lambda)$和$s(z,\zeta)$关于$(U_{j_0}\varphi_{j_0})$的表示. 那末由(4.13.4)

$$\Omega(\zeta,\lambda)=\varphi^{v-n\mu}(z,\zeta)\wedge\omega'(v(\zeta,\lambda))\wedge\omega(u(\zeta)).$$

由于$\omega(u(\zeta))$是$(n,0)$次的,我们有$\Omega(\zeta,\lambda)=\varphi^{v-n\mu}(z,\zeta)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}v_k(\zeta,\lambda)\bigwedge_{l\neq k}(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)v_l(\zeta,\lambda)\wedge\omega(u(\zeta))$.

注意到$\varphi^{v-n\mu}$是全纯的,于是有

$$(4.13.35)\quad(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)\Omega(\zeta,\lambda)\doteq n\varphi^{v-n\mu}(z,\zeta)\bigwedge_{k=1}^{n}(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)v_k(\zeta,\lambda)\wedge\omega(u(\zeta)).$$

由于$\sum_{k=1}^{n}v_k(\zeta,\lambda)u_k(\zeta)=\varphi^\mu(z,\zeta)<t^*(z,\zeta,\lambda),s(z,\zeta)>=\varphi^\mu(z,\zeta)$,

并且$(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)\varphi^\mu(z,\zeta)=(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)u_k(\zeta)=0$,我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}v_k(\zeta)(\bar{\partial}_\zeta+d_\lambda)u_k(\zeta,\lambda)=0.$$

这表示

(4.13.36) $\bigwedge_{k=1}^{n}(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda)v_k(\zeta,\lambda) = 0,$

因为(4.13.36)左端的形式是连续的，而集合$\{\zeta \in M: u(\zeta) \neq 0\}$在$M$中是稠密的由(4.13.35)和(4.13.36)即得$(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda)\Omega(\zeta,\lambda) = 0.$ □

**定理 4.13.2** (Leray-Stokes 公式) 命$(s^*, k^*)$为关于$(D,s,\varphi)$的 Lreay 截面，又整数$\nu \geqslant \max(2nk, nk^*)$那末对每一在$\bar{D}$的连续的函数使得$\bar{\partial} f$在$\bar{D}$仍然是连续的，有

(4.13.37) $f = L_{\partial D}f - R_{\partial D}\bar{\partial} f - B_D\bar{\partial} f$ 在 $D$. 其中 $L_{\partial D} = L_{\partial D}(\varphi^\nu, s^*, s), R_{\partial D} = (\varphi^\nu, s^*, \bar{s}, s)$，和 $B_D = B_D(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$.

**证明** 由 Bochner — Martinelli 公式(4.13.30)，只要证明

$R_{\partial D}\bar{\partial} f = L_{\partial D}f - B_{\partial D}f$ 在 $D$. 这个等式成立，可以由 Stokes 公式和引理 4.13.3 并到注意到由(4.13.4)有

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{\omega'_\zeta(s^*(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\langle s^*(z,\zeta) \wedge s(z,\zeta)\rangle^n}$$

和

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(t^*(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))|_{\lambda=1}$$
$$= \frac{\omega'_\zeta(\bar{s}(z,\zeta)) \wedge \omega_\zeta(s(z,\zeta))}{\|s(z,\zeta)\|_\sigma^{2n}}$$

得知，其中 $t^* = t^*_{(s^*,\bar{s},s)}$ (见(4.13.21)).

**注意** (i) 当 $s^* = \bar{s}$ 时，我们有 $R_{\partial D} = 0, L_{\partial D} = B_{\partial D}$，这时 Leray 公式(4.13.37)就是 Bochner — Martinelli 公式(4.13.30).

(ii) 当截面 $s^*(z,\zeta)$ 关于 $z$ 是全纯的，这时 $s^*(z,\zeta)$ 相当于 $C^n$ 空间中强拟凸域 $D$ 上的函数 $P(\zeta,z)$ (注意函数，$P(\zeta,z)$ 由 $D$ 的强拟凸性决定，参考引理 4.6.2)，Leray—Stokes 公式(4.13.37)就可得到 Stein 流形强拟凸域 $D$ 上 $\bar{\partial}$ 一方程的连续可微解(参考 §4.6).

(iii) Leray 公式(4.13.37)可以拓广到由定义 4.9,1 所定义的

具有逐块光滑边界的域上去，得到所谓 Leray — Norguet 公式（参考§4.9和 G. M. Henkin&J. Leiterer[1981][1983]）.

(*iv*) 当 $f$ 是在 $\bar{D}$ 的某一邻域中的全纯函数时，$\bar{\partial} f = 0$，由此立得

**推论 4.13.2** (Lereay) 命 $(s^*, k^*)$ 为关于 $(D, s, \varphi)$ 的 Leray 截面，又整数 $\nu \geqslant nk^*$ 则对 $\bar{D}$ 的某一邻域中的全纯函数 $f$，有

(4.13.38) $$f = L_{\partial D} f \qquad 在 D,$$

其中 $L_{\partial D} = L_{\partial D}(\varphi^\nu, s^*, s)$.

这就是 Stein 流形上的 Canchy — Fantappie 公式（参考定理 4.2.1），也不难直接证明.

## §4.14 Cauchy — Fantappiè 公式和 Andreotti — Norguet 公式

象在 $C^n$ 中一样，Stein 流形上的 Cauchy — Fantappie 公式 (4.13.38) 也有如下的拓广形式 (L. A. Aizenberg&A. P. Yuzhakov[1983]；钟同德[1987.*a*]).

**定理 4.14.1** (Leray 和 Koppelman) 设 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 上的一相对紧区域，具有逐块 $C^{(1)}$ 类的光滑边界，又光滑截面 $S^{*(0)}(z,\zeta) \in C(\partial D), S^{*(j)}(z,\zeta) \in C^{(1)}(\partial D), j = 1, \cdots, n-1$，满足条件

(4.14.1) $$\langle s^{*(j)}(z,\zeta), s(z,\zeta) \rangle \neq 0, \zeta \in \partial D, z \in D,$$
$$j = 0, 1, \cdots, n-1$$

那末任一函数 $f(z) \in A_c(D)$ 都满足拓广的 Cauchy — Fantappiè 公式

(4.14.2) $$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \Omega_\zeta(\varphi^\nu(z,\zeta), s^{*(0)}, s^{*(1)}, \cdots, s^{*(n-1)}, s)$$

其中

(4.14.3) $$\Omega_\zeta(\varphi^\nu(z,\zeta), s^{*(0)}, s^{*(1)}, \cdots, s^{*(n-1)}, s)$$

$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \varphi^v(z,\zeta) \frac{< s^{*(0)}, ds >}{< s^{*(0)}, s >} \wedge d \frac{< s^{*(1)}, ds >}{< s^{*(1)}, s >}$$
$$\wedge \cdots \wedge d \frac{< s^{*(n-1)}, ds >}{< s^{*(n-1)}, s >}.$$

又 $\varphi$ 是 $M \times M$ 上的全纯函数，对所有的 $z \in M, \varphi(z,z) = 1$，并且对足够大的整数 $v$，形式 $\Omega_\zeta()$ 对第一固定的 $z \in D$，在 $\partial D$ 上是连续的.

特别当 $s^{*(0)} = \cdots\cdots = s^{*(1)} = s^{*(n-1)} = s^*$ 时，公式(4.14.2)即推论 4.13.2 中的 Canchy — Fantappiè 公式(4.13.38)，而且还可以象 $C^n$ 中一样，将它写成更抽象的形式，积分边界 $\partial D$ 可用 $\partial D$ 所对应的积分循环的同调类代替.

在 $C^n$ 空间中全纯函数的任意阶导数有时不必从它的积分表示公式直接去求，而这些导数本身有它们简洁的积分表示公式称为 Andreotti — Norguet 公式 (L,A. Aizenberg and A.P. Yuzhakov[1983]) 下面我们写出 Stein 流形上全纯函数的任意阶导数的具 Bochner — Martinelli 型核和 Canchy — Fantappie 型核的公式(钟同德[1987b])

**定理 4.14.2** 设 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 中的一相对紧区域，具有逐块 $C^{(1)}$ 类的光滑边界 $f \in A_c(D)$，那末对任一点 $z \in D$ 和任意的 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中所有 $\alpha_k (k = 1, \cdots, n)$ 都是非负整数，有

$$\int_{\partial D} f(\zeta) \Omega_\alpha^*(\varphi^v, \bar{s}, s, z) = D^\alpha f(z), z \in D, \tag{4.14.4}$$

其中

$$\Omega_\alpha^*(\varphi^v, \bar{s}, s, z) = \varphi^v(z, \cdot) \Omega_\alpha(\bar{u}, u) \tag{4.14.5}$$
$$= \frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n} \varphi^v(z, \cdot) \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{u}_k^{\alpha_k+1} d\bar{u}[k]^{\alpha+1} \wedge du}{(\overline{u_1} u_1^{\alpha_1+1} + \cdots + \overline{u_n} u_n^{\alpha_n+1})^n},$$

$u = \{u_j\}$ 和 $\bar{u} = \{\bar{u}_j\}$ 表示映射 $s(z, \cdot)$ 和 $\bar{s}(z, \cdot)$ 在 $z$ 的邻域中的某一全纯坐标.

**定理 4.14.3** 假设定理 4.14.2 的条件满足，又向量函数 $u^*(z,\zeta) \in C_\zeta^{(1)}(\partial D)$ 满足条件 $< u^*(z,\zeta), u(z,\zeta)^{\alpha+I} >: = u_1^* u_1^{\alpha_1+1}$

$+ \cdots + u_n^* u_n^{\alpha_n+1} \neq 0, z \in D, \zeta \in \partial D.$

那末

(4.14.6) $\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega_\alpha^\circ(\varphi^\nu, s^*, s; z) = D^\alpha f(z), z \in D,$

其中

(4.14.17) $\Omega_\alpha^\circ(\varphi^\nu, s^*, s; z) = \varphi^\nu(z, \cdot)\Omega_\alpha(u^*, u)$

$$= \frac{(n-1)!\,\alpha!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k^{*\alpha_k+1} du_{[k]}^{*\alpha_k+1} \wedge du}{< u^*, u^{\alpha+I} >^n}$$

$u^* = \{u_j^*\}$ 和 $u = \{u_j\}$ 表示映射 $s^*(z, \cdot)$ 和 $s(z, \cdot)$ 在 $z$ 的邻域中的某一全纯坐标.

**定理 4.14.4** 如果定理 4.14.1 的条件满足并且向量值函数 $u^{*(0)} \in C_\zeta(\partial D)$，又 $u^{*(j)} \in C_\zeta^{(1)}(\partial D), j = 1, \cdots, n-1$，满足条件

$$\langle u^{*(j)}(z,\zeta), u^{\alpha+I}\rangle \neq 0, z \in D, j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

那末

(4.14.18) $$\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega_\alpha^\circ(\varphi^\nu, s^{*(0)} s^{*(1)}, \cdots, s^{*(n-1)}, s; z) = D^\alpha f(z), z \in D,$$

其中

(4.14.19) $\Omega_\alpha^\circ(\varphi^\nu, s^{*(0)} s^{*(1)}, \cdots, s^{*(n-1)}, s, z)$

$$= \varphi^\nu(z, \cdot)\Omega_\alpha^\circ(u^{*(0)} u^{*(1)}, \cdots, u^{*(n-1)}, u)$$

$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \frac{< u^{*(0)}, du >}{< u^{*(0)}, u^{(\alpha+1)} >} \wedge d\frac{< u^{*(1)}, du >}{< u^{*(1)}, u^{(\alpha+1)} >}$$

$$\wedge \cdots \wedge d\frac{< u^{*(n-1)}, du >}{< u^{*(n-1)}, u^{(\alpha+1)} >}.$$

其中 $u^{*(0)} = \{u_j^{*(0)}\}, u^{*(k)} = \{u_j^{*(k)}\}(k = 1, \cdots, n-1)$ 和 $u = \{u_j\}$ 表示映射 $s^{*(0)}(z, \cdot)$ 和 $s^{*(k)}(z, \cdot)(k = 1, \cdots, n-1)$ 和 $s(z, \cdot)$ 在 $z$ 的邻域中的某一全纯坐标. 又

$$< u^{*(0)}, u^{(\alpha+I)} > : u_1^{*(0)} u_1^{\alpha_1+1} + \cdots + u_n^{*(0)} u_n^{\alpha_n+1}$$

其余类似.

# § 4.15 Koppelman 公式和 Koppelman — Leray 公式

## 4.15.1 背景

设 $M$ 为一 $n$ 维复解析流形，$u$ 和 $v$ 为定义在 $M\times M$ 上的一开集上的 $C^{(1)}$ 类向量函数，命

$$\omega_{z,\zeta}(u)=\bigwedge_{j=1}^{n}d_{z,\zeta}u_j$$

$$(4.15.1)\qquad \bar{\omega}'_{z,\zeta}(v)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\bigwedge_{k\neq j}\bar{\partial}_{z,s}v_k$$

$$<u,v>=\sum_{j=1}^{n}u_jv_j$$

$(z,\zeta)$ 表示 $M\times M$ 上的变量.

$C^n\times C^n$ 上的 Bochner — Martinelli 核具如下形式

(4.15.2)

$$K_{BM}(z,\zeta)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\bar{\omega}'_{z,\zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta})\wedge\omega_{z,\zeta}(z-\zeta)}{|z-s|^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}$$

$$\frac{<\bar{z}-\bar{\zeta},d_{z,\zeta}(z,\zeta)>\wedge(<\bar{\partial}_{z,\zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta}),d_{z,\zeta}(z-\zeta)>)^{n-1}}{|z-\zeta|^{2n}}$$

由它可以得到 $C^n$ 中 $(p,q)$ 型微分形式的积分表示(参考 § 4.10 和钟同德[1986] § 2.7).

设 $D\subset\subset M$ 为 Stein 流形 $M$ 的一开集，$(s^*,k^*)$ 为关于 $(D,s,\varphi)$ 的 Leray 截面，$U$ 为 Stein 流形 $M$ 的坐标卡集中的一开集，$(e_j^*)_{j=1}$ 为 $\tilde{T}(M\times M)$ 的一全纯平凡标架，$u$ 和 $u^*$ 分别为截面 $s$ 和 $s^*$ 关于这标架及其对偶的表示，将上述 Bochner — Martinelli 公式拓广到 Stein 流形时，如果形式上写成

$$\tilde{\Omega}(\varphi^v,s^*,s)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\varphi^v\frac{\bar{\omega}'_{z,\zeta}(u^*)\wedge\omega_{z,\zeta}(u)}{<u^*,u>^v},$$

虽然当 $v\geqslant nk^*$ 时，对固定的 $z\in D$，上式可定义 $D\times\partial D$ 上的

一连续微分形式，但在坐标变换下它不是一个不变微分形式(参考引理 4.13.1). 为了得到在 $D \times \partial D$ 上整体定义的核，它在坐标变换下还是不变微分形式，我们必须利用 $\widetilde{T}(M \times M)$ 的联络(J. P. Demailly&C. Laurent — Thiebaut[1987])，设 $\theta$ 为 $T(M)$ 上的 $C^{\infty}$Hermite 度量，它在 $\widetilde{T}(M \times M)$ 上诱导一 Hermite 度量，仍记为 $\theta$，同时诱导一反线性映射 $\sigma: \widetilde{T}(M \times M) \to \widetilde{T}^{*}(M \times M), \xi \to \langle \cdot, \xi \rangle_{\theta}$. 命 $D$ 为 $\widetilde{T}(M \times M)$ 关于 $\theta$ 的阵联络，$\nabla$ 为 $\widetilde{T}^{*}(M \times M)$ 关于度量 $\theta^{*}$ 的阵联络，而 $\theta^{*}$ 是由 $\theta$ 在 $\widetilde{T}^{*}(M \times M)$ 上诱导的.

记 $\hat{s}$ 为 $C^{\infty}$ 截面，$M \times M \to \widetilde{T}^{*}(M \times M)$，它由 $\hat{s} = \sigma \circ s$ 定义，容易看出 $(\hat{s}, k)$ 是一关于 $(D, s, \varphi)$ 的 *Leray* 截面，$D$ 为 $M$ 的一相对紧开集，它的边界是逐块 $C^{(1)}$ 的，注意，如果 $\theta$ 是定义 4.13.3 段中所定义的 $T(M)$ 的度量，那末 $\hat{s}$ 就和(4.13.17)中所定义的 $\bar{s}$ 一致，而且 $\hat{s}$ 和 $\bar{s}$ 具有相同的性质.

如果 $(s^{*}, k^{*})$ 是一关于 $(D, s, \varphi)$ 的 Leray 截面并且 $\nu \geqslant k^{*}$，那末

(4.15.3)

$$\widetilde{\Omega}(\varphi^{\nu}, s^{*}, s) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{(2\pi)^{n}} \varphi^{\nu} \frac{\langle s^{*}, Ds \rangle \wedge \langle \nabla'' s^{*}, Ds \rangle^{n-1}}{\langle s^{*}, s \rangle^{n}}$$

定义在 $D \times M$ 中 $D \times \partial D$ 的一邻域中的一连续不变微分形式，如果 $s^{*} = \hat{s}, \nu \geqslant k$，那末微分形式 $\widetilde{\Omega}(\varphi^{\nu}, \hat{s}, s)$ 在 $M \times M \backslash \triangle(M)$ 上是 $C^{(1)}$ 的，并且在 $z = \zeta$ 有 $2n - 1$ 阶的奇性.

### 4.15.2 $\widetilde{\Omega}(\varphi^{\nu}, \hat{s}^{*}, s)$ 在局部坐标下的表达式

假设 $U$ 是 Stein 流形的坐标卡集中的一个开集，又 $(e_j)_{j=1}^{n}$ 是 $\widetilde{T}(M \times M)$ 全纯平凡标架，度量 $\theta$ 是这标架中由正定的 $C^{\infty}$ 的仅仅依

赖于变量 $z$ 的 Hermite 矩阵 $H$ 给出的，而 $\theta$ 在 $\widetilde{T}^*(M\times M)$ 上的诱导度量则是由矩阵 $\overline{H}^{-1}$ 在对偶标架中给出的.

设 $u,u^*,\hat{u}$ 分别为 $s,s^*,\hat{s}$ 在所选标架中的表示；又 $Ds,\nabla s^*$ 和 $\nabla\hat{s}$ 在该标架中的表示分别为 $du+(H^{-1}\partial H)\wedge u, du^*+(H\partial\overline{H}^{-1})\wedge u^*$ 和 $d\hat{u}+(\overline{H}\partial\overline{H}^{-1})\wedge\hat{u}$，而由 $\hat{s}$ 的定义我们有 $\hat{u}=\overline{H}\,\overline{u}$. 命

$D=D'+D'',\nabla=\nabla'+\nabla''$.

则我们有

$$\nabla''s^*=\nabla''u^*=\overline{\partial}u^* \tag{4.15.4}$$

$$\langle\nabla''s^*,Ds\rangle=\sum_{j=1}^{n}\overline{\partial}u_j^*\wedge(du_j+((H^{-1}\partial H)\wedge u)_j) \tag{4.15.5}$$

$$\langle s^*,Ds\rangle=\sum_{j=1}^{n}u_j^*(du_j+((H^{-1}\partial H)\wedge u)_j) \tag{4.15.6}$$

类似于引理 4.10.3 的证明我们有

**引理 4.15.1**

$$\langle S^*,DS\rangle\wedge(\langle\nabla''s^*,Ds\rangle)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{4.15.7}$$

$$(n-1)!\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}u_j^*\bigwedge_{k\neq j}\overline{\partial}u_k^*\right]\wedge\bigwedge_{\nu=1}^{n}(du_\nu+((H^{-1}\partial H)\wedge u_\nu)).$$

**证明** 命

$$\omega(DS):=(DS_1)\wedge\cdots\wedge(DS_n),$$

$$\omega(\nabla''s^*):=\overline{\partial}u_1^*\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}u_n^*, \tag{4.15.8}$$

$$\omega'(\nabla''s^*):=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}u_j^*\bigwedge_{k\neq j}\overline{\partial}u_k^*,$$

则

$$n!\,\omega(\nabla''s^*\wedge\omega(Ds)=(-1)^{n(n-1)/2}<\nabla''s^*,Ds>^n. \tag{4.15.9}$$

定义一向量 $\quad a=\sum u_j^*\dfrac{\partial}{\partial u_j^*}$,

对(4.15.9)两端对 $a$ 作用运算 $\lrcorner$，由于

$a\lrcorner\omega(\nabla''s^*)=\omega'(\nabla''s^*)$

$a \rfloor \langle \nabla'' s^*, Ds\rangle^n = n < s^*, Ds > \wedge (< \nabla'' s^*, Ds >)^{n-1}$,
立得公式(4.15.7).□

由公式(4.15.7)可知对局部坐标 $z$ 和 $\zeta$ 有

$$(4.15.10)\langle s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds\rangle)^{n-1} = \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!\,[\overline{\omega'}_{z,\zeta}(u^*) \wedge \omega_{z,\zeta}(u) + 0(|u|_\theta)]$$

因此 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s)$ 和由欧氏度量定义的只相差一低阶奇性项.

特别,如果 $M = C^n$,度量 $\theta$ 是 $C^n$ 中通常的欧氏度量,那末这时联络 $D$ 和 $\nabla$ 就和通常的微分一致,又这时

$\varphi(z,\zeta) = 1, \forall (z,\zeta)^n \in C^n \times C^n$

$s(z,\zeta) = z - \zeta, s^*(z,\zeta) = \bar{z} - \bar{\zeta}$,

而核 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$ 就是 $C^n \times C^n$ 上的 Bochner — Martinelli 核(4.15.2).

#### 4.15.3 (p,q)型微分形式的 Koppelman 公式

首先考察上一段定义的核 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \hat{s}, s)$,由于 $s$ 是全纯的,所以 $Ds = D' s$;联络 $D$ 和 $\nabla$ 之间有一自然的关系 $\nabla \hat{s} = \nabla(\sigma \circ S) = \sigma \circ DS$,其中 $\sigma$ 是反线性的,因而 $\nabla \hat{S} = \nabla'' \hat{s}$,并且 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$ 可写成

$$(4.15.11)\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \hat{s}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^\nu \frac{\langle \hat{s}, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds\rangle)^{n-1}}{|s|_\theta^{2n}}.$$

核 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$ 有如下的分解:

$$(4.15.12)\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \bar{s}, s) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \Omega_q^p(\varphi^\nu, \bar{\zeta}, s), 1 \leqslant q < n-1$$

其中 $\Omega_q^p(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$ 是关于 $z$ 的 $(p,q)$ 型的,关于 $\zeta$ 是 $(n-p, n-q-1)$ 型的分量,我们命 $\Omega^\circ_{-1} = \Omega^\circ_n = 0$.

为简单计,在不致引起混乱的情况下,我们将 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu, \bar{s}, s)$ 和 $\Omega_q^p(\varphi^\nu, \hat{s}, s)$ 分别记为 $\widetilde{\Omega}$ 和 $\Omega_q^p$.

将 $\widetilde{T}(M \times M)$ 和 $\widetilde{T}^*(M \times M)$ 的纤维关于联络 $D$ 和 $\nabla$ 的曲

率形式记为 $C(\widetilde{T}(M\times M))=D^2$ 和 $C(\widetilde{T}^*(M\times M));=\nabla^2$,它们是(1,1)型的并且只依赖于变量 $z$,

**引理 4.15.2**

$$(4.15.13)\quad <\hat{s},s>(<\nabla\hat{s},Ds>)^n=$$
$$=n<\nabla\hat{s},s>\wedge<\hat{s},Ds>\wedge(\nabla\hat{s},Ds>)^{n-1}.$$

**证明** 象引理 4.15.1 一样可以证得

$$n!\,\omega(\nabla''\hat{s})\wedge\omega(Ds)=(-1)^{n(n-1)/2}(\langle\nabla''\hat{s},Ds\rangle)^n$$

$$n!\,\omega'(\nabla''\hat{s})\wedge\omega(Ds)$$
$$=(-1)^{n(n-1)/2}n<\hat{s},Ds>\wedge(\langle\nabla''\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}$$

上式两端乘以 $<D\hat{s},s>$ 得

$$n!\,<\nabla''\hat{s},s>\omega'(\nabla''\hat{s})\wedge\omega(Ds)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n<\nabla''\hat{s},s>\wedge<\hat{s},Ds>(\langle\nabla''\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}.$$

由于 $\omega'(\nabla''\hat{s})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\hat{u}_j\bigwedge_{k\neq j}\bar{\partial}\hat{u}_k$,

$$\omega(\nabla''\hat{s})=\bar{\partial}u_1\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}u_n$$

所以上式变为

$$n!\,<\hat{s},s>\omega(\nabla''\hat{s})>\omega(Ds)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n<\nabla''\hat{s},s>\wedge<\hat{s},Ds>(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}.$$

利用上面第一个等式到上式左端并注意到 $\nabla\hat{s}=\nabla''\hat{s}$ 即得公式(4.15.13)·□

**引理 4.15.3** 在 $M\times M\backslash\triangle M$ 上我们有

$$(4.15.14)\bar{\partial}\widetilde{\Omega}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\frac{\varphi^\nu}{\langle\hat{s},s\rangle}(<\hat{s},C(\widetilde{T}(M\times M))\wedge s>\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1})+(n-1)<\hat{s},Ds>\wedge\langle\nabla\hat{s},C(\widetilde{T}(M\times M))\wedge s>\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-2}).$$

并且 $\bar{\partial}\widetilde{\Omega}$ 在对角线上有 $2n-2$ 阶的奇性,如果 $C(\widetilde{T}(M\times M))$

$= 0$,那末 $\overline{\partial}\widetilde{\Omega} = 0$.

**证明** 首先计算 $d\left[\dfrac{<\hat{s}, Ds> \wedge <\nabla \hat{s}, Ds>^{n-1}}{<\hat{s}, s>^n}\right]$.

根据联络 $D$ 与 $\nabla$ 和度量的相容条件我们有(参考定义 3.6.3)

$$d<\hat{s}, s> = <\nabla \hat{s}, s> + <\hat{s}, Ds>$$

$$d(<\hat{s}, Ds> = <\nabla \hat{s}, Ds> + <\hat{s}, C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge s>$$

$$d(\langle \nabla \hat{s} Ds \rangle)^{n-1} = (n-1)\langle C(\widetilde{T}^*(M \times M)) \wedge \hat{s}, Ds> - \langle \nabla \hat{s}, C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge s> \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}.$$

因此我们有

$$d\left[\frac{<\hat{s}, Ds> \wedge <\nabla \hat{s}, Ds>^{n-1}}{<\hat{s}, s>^n}\right] = \frac{1}{(<\hat{s}, s>)^{n-1}}[<\hat{s}, s> (<\nabla \hat{s}, Ds>)^n + <\hat{s}, s>^n, C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge s> \wedge (<\nabla \hat{s}, Ds>)^{n-1} - (n-1) <\hat{s}, s> <\hat{s}, Ds> \wedge (<C(\widetilde{T}^*(M \times M) \wedge \hat{s}), Ds> - <\nabla \hat{s}, C(\widetilde{T}(M \times M) \wedge s>) \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2} - n(\langle \nabla \hat{s}, s \rangle + \langle \hat{s}, Ds \rangle) \wedge \langle \hat{s}, Ds \rangle) \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}]$$

由 $\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \hat{s}, Ds \rangle = 0$ 和公式(4.15.13)并注意到 $\varphi$ 是全纯的和 $\nabla \hat{s} = \nabla'' \hat{s}$,同时考虑到次数即得公式(4.15.14).

现在研究 $\overline{\partial}\widetilde{\Omega}$ 在 $z = \zeta$ 的奇性,由 $\hat{s}$ 的定义,我们有 $\langle \hat{s}, s \rangle = |s|_\theta$,如果 $z$ 和 $\zeta$ 在 $M$ 的一紧集上变动,那末微分形式 $C(\widetilde{T}(M \times M))$,$\nabla \hat{s}$ 和 $Ds$ 是有界的,同时由于 $|\hat{s}| = |\sigma s| = 0(|s|_\theta)$,所以有 $\overline{\partial}\widetilde{\Omega} = 0(|s|_\theta^{-2n+2})$ · □

**定理 4.15.1** (Koppelman)假设 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 的一相对紧区域,它的边界是逐块 $C^{(1)}$ 的,并且 $\nu \geqslant 2k$,如果 $f$ 是一$(p,q)$ 型微分形式在 $\overline{D}$ 上连续,而且 $\overline{\partial}f$ 仍然在 $\overline{D}$ 上连续,$0 \leqslant p, q \leqslant n$,对 $z \in D$,我们有

(4.15.15) $f(z) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta) - \int_{\zeta\in\partial D}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta) + \bar\partial_z\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)(-1)^{p+q+1}\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge P_q^p(z,\zeta)\Big]$,

其中 $\Omega_q^p(z,\zeta)=\Omega_q^p((\varphi^\nu,\overset{\wedge}{s},s)(z,\zeta)$ 又 $P_q^p(z,\zeta)$ 是 $\bar\partial\widetilde{\Omega}$ 中关于 $z$ 是 $(p,q)$ 型的分量. (J. PDemailly&C. Laurent — Thiebaut[1987])

**注意** 1. 如果 $p=0$,则 $P_q^p=0$,因为 $C(\widetilde{T}(M\times M))$ 关于 $z$ 是 $(1,1)$ 型的,由(4.15.15)就得到 G. M. Henkin 和 J. Leiterer[1981]中的公式(2.4.6)或钟同德[1986]中的公式(3.7.45)

2. 如果度量 $\theta$ 使得 $C(\widetilde{T}(M\times M))=0$,我们就得到经典的 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman 公式(参考定理 4.10.1 和钟同德[1986]§2.7)

**证明** 只要对所有在 $D$ 有紧支集的 $C^\infty$,$(n-p,n-q)$ 型微分形式 $g$ 证明下式成立

(4.15.16) $$\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in D\times D}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)\Big]$$
$$+\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)\wedge\bar\partial_z g(z)$$
$$-\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge P_q^p(z,\zeta)\wedge g(z).$$

考虑到微分形式的阶我们可以用 $\widetilde{\Omega}$ 代替 $\Omega_q^p$ 和 $\Omega_{q-1}^p$,用 $\bar\partial\widetilde{\Omega}$ 代替 $P_q^p$,同样可以用 $df$ 和 $dg$ 代替 $\bar\partial f$ 和 $\bar\partial g$. 因此只要证明下列等式成立

(4.15.17) $$\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in D\times D} d_\zeta f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)\Big]$$
$$+\int_{(\zeta,s)\in D\times D} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge d_z g(z)$$
$$-\int_{(z,s)\in D\times D} f(\zeta)\wedge\bar\partial_{z,\zeta}\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z).$$

由 $s$ 的性质，我们可以找到对角线 $\triangle = \{(z,z) \mid z \in M\}$ 的一个邻域 $U_\triangle \subset M \times M$ 使得对所有 $M$ 上的固定点 $z$, $s(z,\zeta)$ 对所有使 $(z,\zeta) \in U_\triangle$ 的 $\zeta \in M$ 是双全纯的，考虑开集

$U_\varepsilon := \{(z,\zeta) \in U_\triangle \times U_\triangle : |s|_\theta < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$，由于 $D \subset\subset M$，对足够小的 $\varepsilon$, $\partial U_\varepsilon \cap (D \times D)$ 是光滑的.

现在在开集 $D_\varepsilon = D \times D \backslash U_\varepsilon$ 上对微分形式 $f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)$ 应用 Stokes 公式，由于 $\mathrm{Supp}g \subset\subset D$，对足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\partial D_\varepsilon \cap (\mathrm{Supp}g \times M) = (D \times \partial D \cup \partial U_\varepsilon) \cap (\mathrm{supp}g \times M)$$

考虑到定向，上式可写成

$$\partial D_\varepsilon \cap (\mathrm{Supp}g \times M) = (D \times \partial D - \partial U_\varepsilon) \cap (\mathrm{Supp}g \times M)$$

于是有

$$\int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in\partial U_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) = \int_{(z,\zeta)\in D_\varepsilon} d_{z,\zeta}(f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)).$$

由于

$$d_{z,\zeta}(f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)) = d_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) g(z) + (-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(\zeta) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge d_z g(z).$$

并考虑到阶数，我们可用 $\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ 代替 $d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$，由于得到

$$(4.15.18)\quad \int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in\partial U_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) = \int_{(z,\zeta)\in D_\varepsilon} d_\zeta(f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1}\int_{(z,\zeta)\in D_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge d_z g(z).$$

显然，在对角线的邻域 $\tilde{\Omega}$ 有 $2n-1$ 阶奇性，$\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ 有 $2n-2$ 阶奇性，这两个微分形式在 $D \times \bar{D}$ 是局部可积的，因此上式右端的各

个积分项当 $\varepsilon\to 0$ 时，分别趋于(4.15.17)中的对应项，剩下只要证明

(4.15.19)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in\partial\mathscr{U}_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=$$
$$=(-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z).$$

下面我们作为一个引理来证明. □

**引理 4.15.4**

(4.15.19)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in\partial\mathscr{U}_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=$$
$$=(-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z).$$

**证明** 命 $\{(U_j,\varphi_j)\}$ 为 $M$ 的全纯坐标卡集，又 $\{\chi_j\}$ 为从属于 $\{U_j\}$ 的 $C^\infty$ 一单位分解记，$g_j:=\chi_j g$ 并选择开集 $V_j\subset\subset U_j$ 使得 $\mathrm{Supp}\chi_j\subsetneqq V_j$，于是只要证明，对所有的 $j$，

(4.15.20)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in\partial\mathscr{U}_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g_j(z)=$$
$$=(-1)^{p+q}\int_{z\in V_j} f(z)\wedge g_j(z).$$

以后我们固定 $j$，如果 $\varepsilon$ 足够小，那末对所有的 $(z,\zeta)\in U_\varepsilon$，其中 $z\in V_j$，则有 $\zeta\in U_j$ 所以(4.15.20)可写成

(4.15.21)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in(V_j\times U_j)\cap\partial\mathscr{U}_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g_j(z)=$$
$$=(-1)^{p+q}\int_{z\in V_j} f(z)\wedge g_j(z).$$

由4.15.2段可知当 $(z,\zeta)\in V_j\times U_j$ 时，核 $\widetilde{\Omega}(\varphi^\nu\hat{s},s)$ 在局部坐标下的表达式为

(4.15.22)
$$\widetilde{\Omega}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\varphi^\nu\frac{\overline{\omega'}_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\zeta}(u)}{|u|_\theta^{2n}}+$$
$$0(|u|_\theta^{-2n+2}),$$

其中 $\hat{u}(z,\zeta)$ 和 $u(z,\zeta)$ 分别为 $\hat{s}$ 和 $s$ 关于 $(U_j,\varphi_j)$ 的表示，特别，在 $\partial\mathscr{U}_\varepsilon\cap(V_j\times(U_j\cap\overline{D}))$ 上有

$$(4.15.23)\quad \tilde{\Omega}(z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\varphi^\nu \frac{\overline{\omega'}_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}} + 0(\varepsilon^{-2n+2}).$$

由于集合$(V_j \times U_j) \cap \partial U_\varepsilon$的测度为$0(\varepsilon^{2n-1})$，所以(4.15.21)式变为

$$(4.15.24)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in(V_j\times U_j)\cap\partial U_\varepsilon} f(\zeta) \wedge K(z,\zeta) \wedge g_j(z) = $$

$$= (-1)^{p+q}\int_{z\in V_j} f(z) \wedge g_j(z),$$

其中

$$(4.15.25)\quad K(z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\varphi^\nu \frac{\overline{\omega'}_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}}.$$

要证明(4.15.24)式需要作一些准备，由定理4.21.1条件(ii)，我们可以找到$\varepsilon_0 > 0$使得由$T(z,\zeta) := (\varphi_j(z), u(z,\zeta))$的映射$T:(U_j \times U_j) \cap U_{\varepsilon_0} \to C^n \times C^n$是从$(U_j \times U_j) \cap U_{\varepsilon_0}$到某一开集$W_{\varepsilon_0} \subseteqq C^n \times C^n$的双全纯映上，命$T^{-1}: W_{\varepsilon_0} \to (U_j \times U_j) \cap U_{\varepsilon_0}$为$T$的逆映射，命$\alpha(\eta,\xi): W_{\varepsilon_0} \to U_j$为由对所有的$(z,\zeta) \in (U_j \times U_j) \cap U_{\varepsilon_0}$都有$\alpha(\varphi_j(z), u(z,\zeta)) = \zeta$所定义的映射，那末

$(4.15.26)\quad T^{-1}(\eta,\xi) = (\varphi_j^{-1}(\eta), \alpha(\eta,\xi))$ 对所有$(\eta,\xi) \in W_{\varepsilon_0}$.

再者，显然有

$(4.15.27)\quad u(T^{-1}(\eta,\xi)) = \xi,$ 对所有$(\eta,\xi) \in W_{\varepsilon_0}$.

和

$(4.15.28)\quad T^{-1}(\eta,0) = (\varphi_j^{-1}(\eta), \varphi_j^{-1}(\eta))$ 对所有$\eta \in \varphi_j(U_j)$

对$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$置$Z\varepsilon := T((V_j \times U_j) \cap \partial U_\varepsilon)$由于$V_j \subset\subset U_j$我们可以找到$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，使得

$(4.15.29)\quad Z_\varepsilon \subset\subset W_{\varepsilon_0}$ 对$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$,

并且，对某些常数$C < \infty$，$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$和$(z,\zeta) \in (V_j \times U_j) \cap \partial U_\varepsilon$有$|u(z,\zeta)| \leqslant C\|s(z,\zeta)\|_\sigma \leqslant C\varepsilon$,

即

(4.15.30) $\|\xi\| \leqslant C\varepsilon$ 对 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ 和 $(\eta,\varepsilon) \in Z_\varepsilon$.

由(4.15.28),对所有 $\eta \in \varphi_j(U_j)$ 我们得到 $\overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,0)) = 0$. 由于,$\overset{\wedge}{u} \circ T^{-1}$ 在 $W_{\varepsilon_0}$ 上是 $C^\infty$ 的,和(4.15.19)和(4.15.20)一起表示存在一常数 $C < \infty$ 使得

$|\overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,\xi))| \leqslant C\varepsilon$ 和 $\|d_\eta|\overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,\xi))| \leqslant C\varepsilon$ 对所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ 和 $(\eta,\xi) \in z_\varepsilon$,所以,我们能够找到一常数 $C < \infty$ 使得

(4.15.31) $\|\overline{\omega}'_{\eta,\xi}(\overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,\xi))) - \overline{\omega}'_{\xi}(\overset{\wedge}{u}T^{-1}(\eta,\xi)))\| \leqslant C\varepsilon^2$ 对所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ 和 $(\eta,\xi) \in Z\varepsilon$,

其中

$$\overline{\omega}'_{\eta,\xi}(\overset{\wedge}{u}) := \frac{1}{(n-1)!}\det_{1,n-1}(\overset{\wedge}{u}\,(\overline{\partial}_\eta + \overline{\partial}_\xi)\overset{\wedge}{u})$$

和

$$\overline{\omega}'_{\xi}(\overset{\wedge}{u}) := \frac{1}{(n-1)!}\det_{1,n-1}(\overset{\wedge}{u}),\overline{\partial}_\xi(\overset{\wedge}{u})$$

又其中行列式记号的定义为

$$\det_{s_1\cdots s_m}(a_1\cdots a_m) := \det(\underbrace{a_1,\cdots,a_1}_{s_1},\underbrace{a_m,\cdots,a_m}_{s_m})$$

其中 $1 \leqslant m \leqslant n, a_1,\cdots,a_m$ 为长度为 $n$ 的微分形式的列指标,$s_1,\cdots,s_m$ 为非负整数使得 $s_1 + \cdots + s_m = n$.

命 $(\varphi_j^{-1})^* f$ 和 $\alpha^* f$ 的分别为由 $\varphi_j^{-1}$ 和 $\alpha$ 定义的 $f$ 拉回,并命

(4.15.32) $$(\varphi_j^{-1})^* f(\eta) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n, 1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n} f_{i_1\cdots i_p, j_1\cdots j_q}\, d\eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\eta_{i_p} \wedge d\overline{\eta}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\eta}_{j_q}$$

如果 $\varphi_{j_1},\cdots,\varphi_{j_n}$ 为 $\varphi_j$ 的分量,那末有

(4.15.33) $$f(\zeta) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n, 1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n} f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}(\varphi_j(\zeta))d\varphi_{ji_1}(\zeta)\cdots d\varphi_{ji_p}(\zeta)d\overline{\varphi}_{jj_1}(\zeta)\cdots d\overline{\varphi}_{jj_q}(\zeta)$$ 对 $\zeta \in U_j$,

和

(4.15.34) $\quad \alpha^* f(\eta,\xi) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n, 1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n} f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}$

$(\varphi_j(\alpha(\eta,\xi)))d_{\eta,\xi}\varphi_{ji_1}(\alpha(\eta,\xi)) \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ d_{\eta,\xi}(\varphi_{ji_p}(\alpha(\eta,\xi)) \ \wedge$ $d_{\eta,\xi}\overline{\varphi}_{ji_1}(\alpha(\eta,\xi)) \wedge \cdots \wedge d_{\eta,\xi}\overline{\varphi}_{jj_q}(\alpha(\eta,\xi))$,对$(\eta,\xi) \in W_{\varepsilon_0}$.

定义

(4.15.35) $\quad \alpha_\eta^* f(\eta,\xi) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n, 1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n} f_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}$

$(\varphi_j(\alpha(\eta,\xi)))d_{\eta,}\varphi_{ji_1}(\alpha(\eta,\xi)) \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ d_\eta(\varphi_{ji_p}(\alpha(\eta,\xi)) \ \wedge$ $d_\eta\overline{\varphi}_{jj_1}(\alpha(\eta,\xi)) \wedge \cdots \wedge d_\eta\overline{\varphi}_{jj_q}(\alpha(\eta,\xi))$,

对$(\eta,\xi) \in W_{\varepsilon_0}$.

由(4.15.28),(4.15.29)和(4.15.30)我们得到一常数$C$使得

$|\varphi_j(\alpha(\eta,\xi)) - \eta| \leqslant C\varepsilon$和$|d_\eta\varphi_j(\alpha(\eta,\xi)) - d\eta| \leqslant C\varepsilon$对所有$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$和$(\eta,\xi) \in Z_\varepsilon$.根据(4.15.32)和(4.15.35)这表示

(4.15.36) $\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon} \left\| \alpha_\eta^* f(\eta,\xi) - (\varphi_j^{-1})^* f(\eta) \right\| = 0.$

由于由(4.15.28)和定理4.21.1条件(*iii*),$\varphi(T^{-1}(\eta,0)) = 1$,我们可以找到$C < \infty$使得

(4.15.37) $\quad |\varphi(T^{-1}(\eta,\xi)) - 1| \leqslant C\varepsilon,$

对$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$和$(\eta,\xi) \in Z_\varepsilon$.

现在我们证明(4.15.24).记$(T^{-1})^*(f\wedge k \wedge g_j)$为关于$T^{-1}$的拉回那末

(4.15.38) $\quad \int_{(z,\xi)\in(V_j\times U_j)\cap\mathscr{W}_\varepsilon} f(\xi) \wedge k(z,\xi) \wedge g_j(z)$

$= \int_{(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon} (T^{-1})^*(f \wedge k \wedge g_j)(\eta,\xi).$

由于

$K(z,\xi) \wedge g_j(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$

$\frac{\varphi^\nu(z,\xi)\overline{\omega}'_{z,\xi}(\hat{u}(z,\xi)) \wedge \omega_{z,\xi}(u(z,\xi))}{\varepsilon^{2n}} \wedge g_j(z)$

对 $(z,\zeta)\in(U_j\times U_j)\cap\partial U_\varepsilon$，由(4.15.26)和(4.15.27)可知对 $(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon$ 有

(4.15.39) $(T^{-1})^*(f\wedge k\wedge g_j)(\eta,\xi)$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\alpha^*(f(\eta,\xi))\wedge$$

$$\frac{\varphi^\nu(T^{-1}(\eta,\xi))\overline{\omega'}_{\eta,\xi}(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi)}{\varepsilon^{2n}}\wedge(\varphi_j^{-1})^*g_j(\eta).$$

由于 $Z_\varepsilon$ 的体积是 $\varepsilon^{2n-1}$ 阶的，由(4.15.31)，

(4.15.37)，(4.15.38)和(4.15.39)可知如能证明

(4.15.40) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon}\alpha^*f(\eta,\xi)\wedge\frac{\overline{\omega'}_\xi(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi)}{\varepsilon^{2n}}\wedge(\varphi_j^{-1})^*g_j(\eta)=(-1)^{p+q}\int_{\eta\in\varphi_j(v_j)}(\varphi^{-1})_j^*f(\eta)\wedge(\varphi_j^{-1})^*g_j(\eta).$$

那末就完成了(4.15.24)式的证明.

由于，对每一 $\eta\in\varphi_j(V_j)$，所有满足 $(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon$ 的点 $\xi\in C^n$ 的集合是 $2n-1$ 维(实)的，并且由于形式 $\overline{\omega'}_\xi(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi)$ 关于 $\xi$ 是 $2n-1$ 次的，在(4.15.40)中形式 $\alpha^*f$ 可以用 $\alpha_\eta^*f$ 代替，鉴于(4.15.36)这表示在(4.15.40)中形式 $\alpha^*f$ 可以用 $(\varphi_j^{-1})^*f$ 代替，所以只要证明对每一固定的 $\eta\in\varphi_j(V_j)$，

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\{\xi\in C^n:(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon\}}\frac{\overline{\omega'}_\xi(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi)}{\varepsilon^{2n}}=1.$$

这可由 Leray 公式(定理 4.2.1)得到，由于证明 Leray 公式时并未用到向量函数 $u(z,\xi)$ 关于 $z$ 的依赖关系，所以对 $(\eta,\xi)\in Z_\varepsilon$ 有

$$\overline{\omega'}_\xi(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi)=\omega'_\xi(\hat{u}(T^{-1}(\eta,\xi)))\wedge\omega_\xi(\xi),$$

并且由(4.15.27)有

$$\langle \overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,\xi)),\xi\rangle = \langle \overset{\wedge}{u}(T^{-1}(\eta,\xi)),(uT^{-1}(\eta,\xi))\rangle$$
$$= \|s((T^{-1}(\eta,\xi))\|_{\sigma}^{2} = \varepsilon^2. \square$$

**4.15.4 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppleman — Leray 公式**

在 $M\times M\times[0,1]$ 上我们记余切丛 $T^*(M)$ 关于映射 $(z,\zeta,\lambda)\to z$ 的拉回为 $\overline{T}^*(M\times M\times[0,1])$. 记切丛 $\overline{T}(M)$ 的度量 $\theta$ 在 $T^*(M\times M\times[0,1])$ 上的诱导度量为 $\overline{\theta}^*$.

设 $\triangle$ 为 $\overline{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 上关于度量 $\overline{\theta}^*$ 的联络.

记 $C_k^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)$ 为 $M\times M\times[0,1]$ 上取值于 $E^*=T^*(M\times M\times[0,1])$ 的 $k$ 阶微分形式的空间,它有如下分解

$C_k^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)=\bigoplus\limits_{p+q+r=k} C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)$,其中 $C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)$ 表示关于 $(z,\zeta)$ 是 $(p,q)$ 型的关于 $\lambda$ 是 $r$ 次的微分形式的空间,

联络 $\triangle$ 可分解为 $\triangle=\triangle'+\triangle''$,其中

$\triangle':C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)\to C_{p+1,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)$,

$\triangle'':C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)\to C_{p,q+1,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)\oplus C_{p,q,r+1}^\infty(M\times M\times[0,1],\overline{E}^*)$.

现在我们研究 $\triangle$ 在局部坐标下的表达式选择 $\overline{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 的一个平凡化并记 $v^*$ 为 $\overline{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 的一个截面 $t^*$ 的局部坐标表示,则有

$\triangle' t^*=\overline{H}(\partial_{z,\zeta}(\overline{H}^{-1}v^*))$ 其中 $H$ 为度量 $\theta$ 在 $T(M)$ 的平凡化中的矩阵.

$\triangle'' t^*=(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)v^*$

设 $D$ 为 Stein 流形上的一相对紧开集,它的边界是逐块 $C^{(1)}$ 的,又 $(s^*,k^*)$ 为关于 $(D,s,\varphi)$ 的 Leray 截面,

对所有使得$\langle s^*(z,\zeta), s,(z,\zeta)\rangle \neq 0$的$0\leqslant\lambda\leqslant 1, z\in D$和$\partial D$的某一邻域中的$\zeta$，定义

(4.15.41) $$t^*(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)\frac{s^*(z,\zeta)}{\langle s^*(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle} + \lambda \frac{\hat{s}(z,\zeta)}{|s(z,\zeta)|_\theta^2}.$$

由$\varphi, s$和$s^*$的性质可知，映射

$$(z,\zeta,\lambda)\mapsto \varphi^{\max(k,k^*)}(z,\zeta)t^*(z,\zeta,\lambda)$$

在$D\times M\times[0,1]$中$D\times\partial D\times[0,1]$的一邻域上定义$\overline{T}^*(M\times M\times[0,1])$的一个$C^{(1)}$截面，由此对所有的整数$v\geqslant\max(nk,nk^*)$，微分形式$\overline{\Omega}(\varphi^v, S^*, \hat{S}, S) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^v < t^*, DS > \wedge (<\triangle'' t^*, DS >)^{n-1}$在$D\times M\times[0,1]$中$D\times\partial D\times[0,1]$的一个邻域上是连续的.

**引理 4.15.5** 下列等式成立

(4.15.42)
$$\overline{\Omega}(\varphi^v, S^*, \hat{S}, S)|_{\lambda=0} = \Omega(\varphi^v, S^*, S)$$
$$\overline{\Omega}(\varphi^v, S^*, \hat{S}, S)|_{\lambda=1} = \Omega(\varphi^v, \hat{S}, S)$$

**证明**：由$t^*$的表达式(4.15.41)可知，只要证明对所有定义在包含$\widetilde{T}^*(M\times M)$的截面$S^*$的定义域的开集上的所有函数$\mu$，下述等式成立就行(参考(4.13.4)式)

$$< \mu S^*, DS > \wedge (< \triangle''(\mu S^*), DS >)^{n-1}$$
$$= \mu^n < S^*, DS > \wedge (< \triangle'' S^*, DS >)^{n-1};$$

而上述等式由

$$< \mu S^*, DS > \wedge < \triangle''_\mu \wedge S^*, DS > = -\mu\triangle''\mu \wedge < S^*, DS > \wedge < S^*, DS >$$
$$= 0$$

立知成立.

当$\lambda = 0$时，命$\mu = < S^*, S >^{-1}$；当$\lambda = 1$时，命$\mu = < \hat{S}, S$

$>^{-1} = |S|_{\theta}^{-2}, S^* = \hat{S}$,应用上述等式,即知等式(4.15.42)成立.

□

**引理 4.15.6** 设 $W \times [0,1]$ 为 $\overline{\Omega}(\varphi^\nu, S^*, \hat{S}, S)$ 的定义域 $W \subset D \times M$,对所有的 $(z,\zeta,\lambda) \in W \times [0,1]$,有

(4.15.43) $$(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^\nu, S^*, \hat{S}, S) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^\nu[< t^*, C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge S > \wedge (< \triangle'' t^*, DS >)^{n-1} + (n-1) < t^*, DS > \wedge < \triangle'' t^*, C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge S > \wedge (< \triangle'' t^*, DS >)^{n-2}].$$

如果,$C(\widetilde{T}(M \times M)) = 0$,则有 $(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^\nu, S^*, \hat{S}, S) = 0$.

**证明**

$$(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^\nu, S^*, \hat{S}, S) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\varphi^\nu[(< \triangle'' t^*, DS >)^n + < t^*, D^2 S > \wedge (< \triangle'' t^*, DS >)^{n-1} - (n-1) < t^*, DS > (< \triangle''^2 t^*, DS > - < \triangle'' t^*, D^2 S >) \wedge (< \triangle'' t^*, DS >)^{n-2}]$$

其中 $\triangle''^2 = 0, D^2 S = C(\widetilde{T}(M \times M)) \wedge S$.

考虑 $\overline{T}^*(M \times M \times [0,1])$ 一个平凡化,设 $v^*$ 为 $t^*$ 在这平凡中的表示,又 $S$ 为 $\widetilde{T}(M \times M)$ 的平凡化中的表示,则

$$\varphi^\nu(< \triangle'' t^*, DS >)^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!(\bigwedge_{j=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^\nu v_j^*)) \wedge (\bigwedge_{k=1}^{n} du_k + ((H^{-1}\partial H) \wedge u_k)).$$

由 $t^*$ 的定义我们有 $\sum_{k=1}^{n}\varphi^\nu v_k^* u_k = \varphi^\nu$,函数 $\varphi$ 和 $u_k$ 关于 $(z,\zeta)$ 是全纯的,并与 $\lambda$ 无关,因而有

(4.15.44) $$\sum_{k=1}^{n} u_k(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^\nu v_k^*) = 0,$$

所以

$$\bigwedge_{k=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi^\nu v_k^*)=0.$$

因为由 Leray 截面的性质(4.15.44)左端是连续的，而集合 $\{(z,\zeta,\lambda)\in W\times[0,1]:S(z,\zeta)\neq 0\}$ 在 $W\times[0,1]$ 是稠密的. 因此有 $\varphi^\nu(<\triangle''t^*,DS>)^n=0$,而引理证明. □

现在我们可以推导 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppleman-Leray 公式.

**定理 4.15.2** (Koppleman-Leray) 设 $D$ 为 Stein 流形上具有 $C^{(1)}$ 逐块光滑边界的相对紧区域，$(S^*,K^*)$ 为关于 $(D,S,\varphi)$ 的 Laray 截面，整数 $\nu\geqslant\max(2nk,k^*)$. 又假设 $\varphi^\nu(z,\zeta)S^*(z,\zeta)/<S^*(z,\zeta),S(z,\zeta)>$ 所有关于 $z$,阶数 $\leqslant 2$ 的导数，和所有关于 $\zeta$,阶数 $\leqslant 1$ 的导数，在 $D\times\partial D$ 的某一邻域 $W\subseteq D\times M$ 中关于 $(z,\zeta)$ 是连续的①. 则对 $\overline{D}$ 上的每一连续的，并且 $\bar{\partial}f$ 在 $\overline{D}$ 上仍然是连续的 $(p,q)$ 型微分形式 $f$, $0\leqslant p,q\leqslant n$,有

(4.15.45)

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q}f(z)=&\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\varphi^\nu,S^*,S)(z,\zeta)\\&-\int_{\zeta\in D}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\varphi^\nu,\hat{S},S)(z,\zeta)\\&-\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}_q^p(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)(z,\zeta,\lambda)\\&+\bar{\partial}_z\Big(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(\varphi^\nu,\hat{S},S)(z,\zeta)\\&+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}_{q-1}^p(\varphi^\nu,s^*,\hat{s},s)(z,\zeta)\Big)\\&+(-1)^{p+q+1}\Big[\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge P_q^p(z,\zeta)\\&-\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge Q_q^p(z,\zeta,\lambda)\Big],z\in D.\end{aligned}$$

其中 $\Omega_q^p(\varphi^\nu,S^*,S)$, $\Omega_q^p(\varphi^\nu,\hat{S},S)$, $\overline{\Omega}_q^p(\varphi^\nu,S^*\hat{S},S)$, $P_q^p$ 和 $Q_q^p$ 分别表示 $\Omega$

① 没有这个假设定理仍然成立，不过证明较复杂.

$(\varphi^\nu,S^*,S)$，$\Omega(\varphi^\nu,\hat{S},S)$，$\overline{\Omega}(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)$，$\bar{\partial}_{z,\zeta}\Omega(\varphi^\nu,\hat{S},S)$，$(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)$ 于 $z$ 是 $(p,q)$ 型的分量.

**注意** 1. 如果 $p=0$，则 $P^p_q=Q^p_q=0$，因为 $C(\widetilde{T}(M\times M))$ 关于 $z$ 是 $(1,1)$ 型的由 (4.15.45) 就得到 G. M. Henkin 和 J. Leiterer[1983] 中关于 $(0,q)$ 型微分形式的 Koppleman-Leray 公式 (4.5.32).

2. 如果度量 $\theta$ 使得 $C(\widetilde{T}(M\times M))=0$，于是有 $P^p_q=Q^p_q=0$，那末由 (4.15.45) 就得到 $C^n$ 空间中 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppleman-Leray 公式在 Stein 流形上的拓广.

**证明** 只要对微分形式 $f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)$ 应用 Stokes 公式. □

**推论 4.15.1** 在定理 4.15.2 的假设下，如果进一步假定 $S^*(z,\zeta)$ 关于 $z\in D$ 是全纯的，$q\geqslant 1$，并且 $C(\widetilde{T}(M\times M))=0$，则有

$$(4.15.46)\quad f(z)=(-1)^{p+q}\Big[\bar{\partial}_z\Big(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^\nu,\hat{S},S)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)(z,\zeta,\lambda)\Big)$$

$$-\Big(\int_{\zeta\in D}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega^p_q(\varphi^\nu,\hat{S},S)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_q(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)(z,\zeta,\lambda)\Big)\Big]$$

特别，对所有在 $\overline{D}$ 上连续并且在 $D$ 上满足 $\bar{\partial}f=0$ 的 $(p,q)$ 型微分形式 $f$，

$$(4.15.47)\quad g(z)=(-1)^{p+q}\Big(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^\nu,\hat{S},S)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^\nu,S^*,\hat{S},S)(z,\zeta,\lambda)\Big)$$

是方程 $\bar{\partial}g=f$ 在 $D$ 上的连续解.

以上结果都是J·P·Demailly和C. Laurent-Thiebaut[1987]得到的，在该文中他们还得到了B. Berndtsson和M. Anderson[1982]在$C^n$空间中所构造的具有加权因子的$(p,q)$型微分形式的Koppleman公式和$\bar{\partial}$一方程解的积分表示在Stein流形上的一个拓广形式，而蔡李宏[1988]则用直接构造的办法得到了Stein流形上$(0,q)$型微分形式具有权因子的Koppleman公式和$\bar{\partial}$一方程解的积分表示·林亚先[1985]得到了Stein流形上$(0,q)$型微分形式的$\bar{\partial}_b$一方程的解的积分表示和一致估计. 最近邱春晖[1988]将R. Harvey和J. Polking[1979]的结果拓广到Stein流形上去，得到了Stein流形上Canchy-Riemann方程的具有权的基本解.

# 第四章 参考文献


王小芹[1985]
华罗庚[1958]
肖荫堂[1979]
陆启铿[1964][1966]
林亚先[1985]
邱春晖[1988]
钟同德[1986][1987,a][1987,b]
蔡李宏[1988]
I. A. Aizenberg & A. P. Yuzhakov[1983]
B. Berndtsson & M. Anderson[1982]
E. Bishop[1961]
H. Cartan[1951/52]
J. P. Demailly & C. Laurent-Thiebaut[1987]
G. B. Folland & J. J. Kohn[1972]
H. Grauert[1958]
H. Grauert & I. Lieb[1970]
H. Grauert & R. Remmert[1984]
R. C. Gunning & H. Rossi[1965]
R. Harvey & J. Polking[1979]
G. M. Henkin & J. Leiterer[1979][1981][1983]

H. Hefer[1950]
L. Hörmander[1965][1966]
J. J. Kohn[1963][1964]
J. Leray[1952]
I. Lieb[1970][1972]
E. Martinelli[1953]
R. Narasimhan[1961]
F. Norguet[1960][1961a][1961b]
N. Φvrelid[1971]
A. Palm[1975]
E. Ramires de Arellano[1970]
R. M. Range & Yum-Tong Siu[1973]
M. Schneider[1970]
F. Sommer[1952]
M. A. Shubin[1970]
E. L. Stout[1975]
A. Weil[1935]
П. А. АйзенбБерг, А. П. Южаков[1979]
Г. М. Хенкин[1969][1970][1971][1977]

# 第五章　复流形上的函数论

有前面四章的预备知识以后，本章介绍一$C^n$空间和Stein流形上的一些函数论问题. 首先我们介绍具有Bochner-Martinelli核的Cauchy型积分的边界性质，我们得到了单复变数Cauchy型积分的著名的J. Plemelj公式的拓广. 其次，在多复变数中有所谓Hartogs现象，这是多复变数和单复变数的本质区别之一，由于这种现象，所以人们对多复变数的全纯开拓理论很感兴趣，由此产生的全纯域和拟凸域的理论. 我们在第二章中已作了初步介绍；本章我们介绍多复变数函数和微分形式越过区域边界的全纯开拓问题，而且这个问题是和具有Bochner－Martinelli核的Cauchy型积分的边界性质以及$\bar\partial$一方程和$\bar\partial_b$－方程是有紧密联系的. 最后我们介绍双全纯映射的C. Fefferman定理，它在拟凸域的分类上起着重要作用，自从C. Fefferman1974年用微分几何方法证明这个定理后，许多人对这个定理的简化证明作了许多研究工作，我们在这里介绍的是S. R. Bell和E. Ligocka所给出的简化证明. 在介绍C. Fefferman定理之前我们还详细介绍了Bergman核函数理论，近十年来它在研究双全纯映射的边界正则性上有广泛应用.

## §5.1　具Bochner－Martinelli核的J. Plemelj公式

### 5.1.1　定义和记号

**1. 光滑可定向流形**

记$D$是$C^n$空间中的一有界域，$Z_\alpha = u_\alpha + iu_{n+\alpha}(\alpha = 1,\cdots\cdots,n)$，其边界$\partial D \xlongequal{\text{记}} \Omega$是一通过原点的$C^{(2)}$类$2n - 1$维光滑可定向流

形，它在原点附近的方程为

(5.1.1) $$F(u_1,\cdots\cdots,u_{2n})=0.$$

$d(\overline{D})$ 表示 $\overline{D}$ 的直径，$V(\Omega)$ 为 $\Omega$ 的体积，$\Omega$ 在点 $\zeta$ 的法线记作 $n_\zeta$. 若在 $\Omega$ 上对变元 $\xi$ 求积分，则记 $\Omega$ 为 $\Omega_\xi$，$\Omega_\xi$ 的体积元素为 $dS_\xi$，并记

$$\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)=\Omega_\xi\cap B_\varepsilon(\zeta),\ \Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)=\Omega_\xi-\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi).$$

**2. 满足 Hölder 条件的函数**

一定义在 $\Omega$ 上的函数 $\varphi(\xi)$ 称为适合指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件，并记作 $\varphi(\xi)\in H(\alpha,\Omega)$. 如果对 $\Omega$ 上任意两点 $\xi$ 与 $\eta$，恒有

(5.1.2) $$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|\leqq M|\xi-\eta|^\alpha,0<\alpha<1,$$

其中 $M$ 为一常数. $\varphi(\xi,\eta)\in H(\alpha,\Omega)$ 指 $\varphi(\xi,\eta)$ 分别记作为 $\xi$ 与 $\eta$ 的函数皆属于 $H(\alpha,\Omega)$，$H(\Omega)=\bigcup\limits_{0<\alpha<1}H(\alpha,\Omega)$.

**3. 具有 Bochner — Martinelli 核的多维奇异积分的 Cauchy 主值**

将由公式(4.1.2)定义的 $B-M$ 核 $\omega(\zeta-Z,\overline{\zeta}-\overline{Z})$ 记为 $K(Z,\zeta)$ 并写成

(4.1.2)′ $$K(Z,\zeta)=\omega(\zeta-Z,\overline{\zeta}-\overline{Z})$$
$$=\sigma\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sigma}{\sigma\zeta_k}\frac{1}{|\zeta-Z|^{2n-2}}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}_{[k]},$$

其中 $\sigma=\dfrac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}$.

**定义 5.1.1** 设 $\varphi(\zeta)$ 为定义在 $\Omega$ 上的函数，积分

(5,1,3) $$\Phi(\zeta)=\int_{\Omega_\xi}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi),\zeta\in\Omega,$$

称为在 $\Omega$ 上的奇异积分，这个奇异积分的值用以下的 Canchy 主值

(5.1.4) $$V.P.\Phi(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi),\zeta\in\Omega$$

来定义它. 如果 $\varphi(\xi)$ 满足 $H$ 条件，那末它的主值是存在的(见定理 5.1.1).

### 5.1.2 一些引理、公式和估计式

**1. 一些引理**

**引理 5.1.1** $K(w,Z)$ 在 $Z \neq w$ 点是一闭形式或称为同调于零,即 $dK(w,Z) = 0$,当 $Z \neq w$.

证明参见定理 4.1.1 或第 4.13.1 段的 1.

**引理 5.1.2** $K(w,Z)$ 经酉线性变换后不变.

**证明** 作线性变换

$$Z_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} u_{\beta\alpha}\xi_\beta \ (\alpha = 1,\cdots\cdots,n), \tag{5.1.5}$$

这变换的系数所组成的方阵

$$U = (u_{\beta\alpha})$$

是一酉方阵,其逆方阵为

$$U^{-1} = (\bar{u}_{\alpha\beta}) = \overline{U}'.$$

经变换(5.1.5)后假设定点 $w$ 变为点 $\eta$,显然

$$|Z - w| = |\xi - \eta|,$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_\alpha}\frac{1}{|Z-w|^{2n-2}} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial Z_\nu}\frac{1}{|\xi-\eta|^{2n-2}}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial Z_\alpha}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\frac{1}{|\xi-\eta|^{2n-2}}\overline{U}_{\nu\alpha},$$

由于

$$dZ = \det U \, d\xi,$$

$$\det U \, d\overline{Z}_{[\alpha]} = \det U \sum_{\beta=1}^{n}\overline{\frac{\partial(Z_1,\cdots\cdots,Z_{\alpha-1},Z_{\alpha+1},\cdots\cdots Z_m)}{\partial(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_{\beta-1},\xi_{\beta+1},\cdots\cdots,\xi_m)}}\overline{d\xi}_{[\beta]}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}u_{\beta\alpha}\overline{d\xi}_{[\beta]},$$

故

$$K(w,Z) = \sigma\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\beta}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\frac{1}{|\xi-\eta|^{2n-2}}\bar{u}_{\beta\alpha}\sum_{\beta=1}^{n}u_{\beta\alpha}d\xi \wedge \overline{d\xi}_{[\beta]}$$

$$= \sigma\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(-1)^{\beta}\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{u}_{\nu\alpha}u_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\frac{1}{|\xi-\eta|^{2n-2}}d\xi \wedge \overline{d\xi}_{[\beta]}$$

$$= \sigma\sum_{\beta=1}^{n}(-1)^{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{1}{|\xi-\eta|^{2n-2}}d\xi \wedge \overline{d\xi}_{[\beta]}$$

引理证明. □

**引理 5.1.3** $K(\eta,\xi)$ 可以写成

$$(5.1.6)\quad K(\eta,\xi) = -(n-1)2^{n-1}i^{n-1}\sigma\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\overline{\xi}_\alpha - \overline{\eta}_\alpha}{|\xi-\eta|^{2n}}\lambda_\alpha dS_\xi,$$

$$\eta \in \Omega$$

其中 $\lambda_\alpha = u_\alpha + iu_{n+\alpha}$ 为 $\Omega$ 的面积元素 $dS_\xi$ 的方向余弦.

$$\sum_{\alpha=1}^{n}|\lambda_\alpha|^2 = \sum_{k=1}^{2n}u_k^2 = 1.$$

**2. 一些公式和估计式**

以后我们常要用到下列一些公式和估计式：

$$(5.1.7)\quad \int_{\Omega_\xi}K(Z,\xi) = \begin{cases}1, & \text{当 } Z \in D^+,\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } Z \in \Omega,\\ 0, & \text{当 } Z \in D.\end{cases}$$

$$(5.1.8)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}|\zeta-\xi|^\alpha|K(\zeta,\xi)| = 0, \zeta \in \Omega, 0 < \alpha \leqq 1$$

$$(5.1.9)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}K(\zeta,\xi) = 0, \zeta \in \Omega$$

$$(5.1.10)\quad \left|\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}K(\zeta,\xi)\right| < 1, \zeta \in \Omega$$

$$(5.1.11)\quad \int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}|\zeta-\xi|^\alpha|K(\zeta,\xi)| \leqslant M, \zeta \in \Omega, 0 < \alpha \leqslant 1.$$

***i*) 公式(5.1.7) 的证明**

我们主要证明(5.1.7) 中的公式

$$V.P.\int_{\Omega\xi}K(\zeta,\xi) = \frac{1}{2}, \zeta \in \Omega,$$

至于(5.1.7) 中的其它两个公式则由 $B-M$ 积分表示(公式(4.1.1)) 中命积分密度等于 1 即可得到，在上述公式证明过程中也可以看出是成立的(参考后面的注意)

证明分两步：

1°. 设 $\zeta = 0$，$\Omega$ 通过原点，假定 $\Omega$ 在 0 点附件的方程为

$$\Omega: F(u_1, \cdots\cdots, u_{2n}) = 0,$$

由于假设 $\Omega$ 是光滑的，即 $\frac{\partial F}{\partial u_k}(k = 1\cdots\cdots, n)$ 不全为零，我们假设在

原点

$$(\frac{\partial F}{\partial u_1})_{u=0} \neq 0, (\frac{\partial F}{\partial u_2})_{u=0} = \cdots\cdots = (\frac{\partial F}{\partial u_{2n}})_{u=0} = 0,$$

换言之，$\Omega$ 在 0 点的超切面为超平面

$$P : u_1 = 0.$$

由于 $(\frac{\partial F}{\partial u_1})_{u_1=0} \neq 0$，我们可以把 $\Omega$ 在原点附近的方程写成

$$\Omega : u_1 - \varphi(u_2, \cdots\cdots u_{2n}) = 0,$$

注意 $\psi$ 仍然是有二级的连续偏微商，并且

(5.1.12) $\varphi(0,0,\cdots\cdots 0) = 0$, $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2})_{u=0} = \cdots\cdots = (\frac{\partial \varphi}{\partial u_{2n}})_{u=0} = 0.$

我们再假定域 $D$ 在原点附近的点在

(5.1.13) $$u_1 - \varphi(u_2, \cdots\cdots, u_{2n}) < 0$$

的一边.

取 $\varepsilon$ 充份小，并取 $\eta < \varepsilon$，作超球面 $u_1^2 \cdots\cdots + u_{2n}^2 = \eta^2$，由于 $K(0,\xi)$ 除 $\xi = 0$ 点外同调于零，故

$$\int_{\Sigma_\varepsilon(0,\xi)} K(0,\xi) + \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2 \\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} K(0,\xi) - \int_{u_1^2+\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} k(0,\zeta) = 0$$

即

$$\int_{\Sigma_\varepsilon(0,\xi)} K(0,\xi) = \int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} K(0,\xi) - \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2 \\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} K(0,\xi),$$

由于

$$\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} K(0,\xi) = -(n-1)\sigma$$

$$\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} \sum_{\alpha=1}^{n}$$

$$(-1)^\alpha \frac{\overline{\xi}_\alpha}{|\xi|^{2n}} d\xi \wedge \overline{d\xi_{[\alpha]}} =$$

$$= \frac{(n-1)2^{n-1}i^n}{\eta^{2n-1}}\sigma\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} dS,$$

其中 $dS$ 代表超球面 $u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2$ 的体积元素，熟知

$$\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} dS = 2\frac{\pi^2}{(n-1)!}\quad \eta^{2n-1},$$

因此

(5.1.14) $$\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\eta^2} K(0,\xi) = 1.$$

所以 $$\int_{\Sigma_\varepsilon(0,\zeta)} K(0,\xi) = 1 - \int_{\substack{u_1^2+\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2\cdots,u_{2n})>0}} K(0,\xi)$$

$$= 1 - \frac{(n-1)2^{n-1}i^n}{\varepsilon^{2n-1}}\sigma\int_{\substack{u_1^2+\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} dS$$

由于 $$\int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots u_{2n})>0}} dS$$

$$= \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} \sqrt{1+(\frac{\partial u_1}{\partial u_2})^2+\cdots\cdots+(\frac{\partial u_1}{\partial u_{2n}})^2}du_2\cdots\cdots du_{2n}$$

$$= \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2<\varepsilon^2\\ \pm\sqrt{\varepsilon^2-u_2^2-\cdots\cdots-u_{2n}^2}-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} \frac{\varepsilon du_2du_3\cdots\cdots du_{2n}}{\sqrt{\varepsilon^2-u_2^2-\cdots\cdots-u_{2n}^2}},$$

作变换

$$u=u_1,\ u_2=\rho\cos\theta_1,\ u_3=\rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\cdots\cdots,$$

$$u_{2n-1}=\rho\sin\theta_1\cdots\cdots\sin\theta_{2n-3}\cos\theta_{2n-2},$$

$$u_{2n}=\rho\sin\theta_1\cdots\cdots\sin\theta_{2n-3}\sin\theta_{2n-2},$$

易证上式在 $2n-1$ 维子空间 $(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})$ 上的积分域是包含子空间的原点的，故

$$\int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} dS$$

$$= \int_0^\pi \sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1\cdots\int_0^\pi \sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} d\theta_{2n-2} \int_{\substack{\rho<\varepsilon \\ \pm\sqrt{\varepsilon^2-\rho^2}-\psi(\rho,\theta)>0}} \frac{\varepsilon\rho^{2n-2}}{\sqrt{\varepsilon^2-\rho^2}} d\rho$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1 \cdots\cdots \int_0^{\pi} \sin\theta_{2n-3} d\theta_{2n-3} \int_0^{2\pi} d\theta_{2n-2}$$

$$\int_{\substack{\lambda^2+\rho^2=\varepsilon^2 \\ \lambda-\psi(\rho,\theta)>0}} \rho^{2n-2}\sqrt{1+(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho})^2} d\rho,$$

其中

$$\psi(\rho,\theta) = \varphi(\rho\cos\theta_1, \cdots\cdots, \rho\sin\theta_1\cdots\cdots\sin\theta_{2n-2}),$$

再作变换

$$v_1 = \lambda - \psi(\rho\theta)$$

$$v_2 = \sqrt{\rho^2 + 2\lambda\psi - \psi^2},\ \theta_1 = \theta_1, \theta_2 = \theta_2, \cdots\cdots \theta_{2n-2} = \theta_{2n-2},$$

这变换的函数行列式为

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial v_1}{\partial\rho} \\ \frac{\partial v_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial v_2}{\partial\rho} \end{vmatrix},$$

由假设，$\varphi$ 有二级连续偏微商，由(4.2.8)式知

(5.1.12)′ $$\psi(0,\theta) = 0,\ (\frac{\partial\psi}{\partial\rho})_{\rho=0} = 0.$$

故 $\psi(\rho,\theta)$ 能写为

$$\psi = \rho^2\Phi(\rho,\theta),$$

其中 $\Phi(\rho,\theta)$ 是 $\rho,\theta$ 的连续函数(注意这里及以后所说的函数性质都是在原点附近的)，故

$$\frac{\partial v_2}{\partial\lambda} = \frac{\psi}{\sqrt{\rho^2+2\lambda\psi-\psi^2}} = \frac{\rho^2\Phi(\rho,\theta)}{\sqrt{\rho^2+2\lambda\rho^2\Phi(\rho,\theta)-\rho^4\Phi^2(\rho,\theta)}}$$

$$= \frac{\rho\Phi(\rho,\theta)}{\sqrt{1+2\lambda\Phi(\rho,\theta)-\rho^2\Phi^2(\rho,\theta)}},$$

故当 $\rho = 0,\ \lambda = 0$ 时

$$\frac{\partial v_2}{\partial\lambda} = 0.$$

同理知当 $\rho = 0, \lambda = 0$ 时

$$\frac{\partial v_2}{\partial \rho} = 1 \text{ 而 } \qquad \frac{\partial v_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0,$$

所以变换在原点附近是有意义的,假定其逆变换为

$$(5.1.15) \qquad \begin{cases} \lambda = v_1 + \Phi_2(v_1, v_2, \theta), \\ \rho = v_2 + \Phi_2(v_1, v_2, \theta). \end{cases}$$

由反函数的理论知道 $\Phi_1(v_1, v_2, \theta)$ 及 $\Phi_2(v_1, v_2, \theta)$ 有二级连续偏微商,且

$$\Phi_1(0,0,\theta) = 0, \quad \Phi_2(0,0,\theta) = 0,$$

由于

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} = 1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_1} = \frac{1}{J}\frac{\partial v_2}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v_2} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_2} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v_1}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_1} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v_2}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v_2} = 1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_2} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{1}{J},$$

因此当 $v_1 = v_2 = 0$ 时

$$(5.1.16) \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_1} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_2} = 0.$$

经变换(5.1.15)后

$$[1 + (\frac{\partial \lambda}{\partial \rho})^2]^{\frac{1}{2}} d\rho = [(\frac{\partial \rho}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \rho}{\partial v_2} dv_2)^2$$

$$+ (\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial v_2} dv_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{[\frac{\partial \Phi_2}{\partial v_1} dv_1 + (1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v_1}) dv_2]^2 + [(1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_1}) dv_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_2} dv_2]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{[1 + \alpha(v_1, v_2, \theta)] + 2\beta(v_1, v_2, \theta)\frac{\partial v_2}{\partial v_1}$$

$$+ [1 + \gamma(v_1, v_2, \theta)](\frac{\partial v_2}{\partial v_1})^2\}^{\frac{1}{2}} dv_1$$

其中

$$\alpha(v_1,v_2,\theta)=(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_1})^2+2\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_1}+(\frac{\partial\Phi_2}{\partial v_1})^2,$$

$$\beta(v_1,v_2,\theta)=\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_2}(1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_1})+\frac{\partial\Phi_2}{\partial v_1}(1+\frac{\partial\Phi_2}{\partial v_2}),$$

$$\gamma(v_1,v_2,\theta)=(\frac{\partial\Phi_2}{\partial v_2})^2+2\frac{\partial\Phi_2}{\partial v_2}+(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_2})^2,$$

都有一级的连续偏微商，且由(5.1.16)知当 $v_1=v_2=0$ 时

$$\alpha(v_1,v_2,\theta)=\beta(v_1,v_2,\theta)=\gamma(v_1,v_2,\theta)=0,$$

故

$$\int_{\substack{\lambda^2+\rho^2=\varepsilon^2\\ \lambda-\psi(\rho,\theta)>0}}\rho^{2n-2}\sqrt{1+(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho})^2}d\rho$$

$$=\int_{\substack{v_1^2+v_2^2=\varepsilon^2\\ v_1>0}}[v_2+\Phi_2(v_1,v_2,\theta)]^{2n-2}\{[1+\alpha(v_1,v_2,\theta)]$$

$$+2\beta(v_1,v_2,\theta)\frac{\partial v_2}{\partial v_1}+[1+\gamma(v_1,v_2,\theta)(\frac{\partial v_2}{\partial v_1})^2\}^{\frac{1}{2}}dv_1.$$

将 $v_1$ 与 $v_2$ 分别换为 $\varepsilon v_1$ 与 $\varepsilon v_2$，则得

$$\int_{\substack{\lambda^2+\rho^2=\varepsilon^2\\ \lambda-\psi(\rho,\theta)>0}}\rho^{2n-2}\sqrt{1+(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho})^2}d\rho=\varepsilon^{2n-1}\int_{\substack{v_1^2+v_2^2=1\\ v_1>0}}[v_2+\varepsilon\Phi_3(\varepsilon,v_1,v_2,$$

$$\theta)]^{2n-2}\cdot\{[1+\varepsilon\alpha_1(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)]+2\varepsilon\beta_1(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)\frac{\partial v_2}{\partial v_2}+[1+\varepsilon\gamma_1(\varepsilon,$$

$$v_1,v_2,\theta)](\frac{\partial v_2}{\partial v_1})^2\}^{\frac{1}{2}}dv_1$$

其中 $\Phi_3(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$，$\alpha_1(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$，$\beta_1(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$ 与 $\gamma_1(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$ 皆是连续函数，取 $\varepsilon$ 充份小将带根号的项展开得

$$\int_{\substack{\lambda^2+\rho^2=\varepsilon^2\\ \lambda-\psi(\rho,\theta)>0}}\rho^{2n-2}\sqrt{1+(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho})^2}d\rho$$

$$=\varepsilon^{2n-1}\int_{\substack{v_1^2+v_2^2=1\\ v_1>0}}[v_2+\varepsilon\Phi_3(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)]^{2n-2}$$

$$\{[1+(\frac{\partial v_2}{\partial v_1})^2]^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\Phi_4(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)\}dv_1,$$

其中 $\Phi_5(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$ 是一连续函数，故

$$\int_{\lambda^2+\rho^2=\varepsilon^2}\rho^{2n-2}\sqrt{1+(\frac{\partial v}{\partial\rho})^2}d\rho=\varepsilon^{2n-1}\int_{\substack{v_1^2+v_2^2=1\\ v_1>0}}v_2^{2n-2}$$

$$\sqrt{1+(\frac{\partial v_2}{\partial v_1})^2}dv_1+\varepsilon^{2n}\int_{\substack{v_1^2+v_2^2=1\\ v_1>0}}\Phi_5(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)dv_1$$

$$=\varepsilon^{2n-1}\int_0^1\frac{(1-v_1^2)^{n-1}}{\sqrt{1-v_1^2}}dv_1+$$

$$\varepsilon^{2n}\int_0^1\Phi_5(\varepsilon,v_1,\sqrt{1-v_1^2},\theta)dv_1,$$

其中 $\Phi_5(\varepsilon,v_1,v_2,\theta)$ 是 $v_1,v_2$ 和 $\theta$ 的连续函数，故最后得

$$\int_{\Sigma_\varepsilon(0,\zeta)}K(0,\xi)=1-(n-1)2^{n-1}i^n\sigma\int_0^\pi\sin^{2n-3}\theta_1d\theta_1$$

$$\cdots\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{2n-3}\,d\theta_{2n-3}\int_0^\pi d\theta_{2n-2}\int_0^1(1-v_1^2)^{n-1-\frac{1}{2}}$$

$$dv_1+\varepsilon(n-1)2^{n-1}i^n\sigma\int_0^\pi\sin^{2n-3}\theta_1d\theta_1\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3}\int_0^\pi d\theta_{2n-2}\int_0^1\Phi_5(\varepsilon,v_1,\sqrt{1-v_1^2},\theta)\,dv_1.$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得

$$V.P.\int_{\Omega_\varepsilon}K(0,\xi)=1-(n-1)2^{n-1}i^n\sigma\frac{\pi^n}{(n-1)!}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2°. 现在证明一般的情形. 如 $\zeta$ 为 $\Omega$ 上的任意一点，$\Omega$ 在 $\zeta$ 点的超切面方程为

$$\sum_{\alpha=1}^{2n}(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha})_{u=u_0}(u_\alpha-\overset{\circ}{u}_\alpha)=0,$$

此即

$$\sum_{\alpha=1}^{n}[\lambda_\alpha(\overline{\xi_\alpha-\zeta_\alpha})+\overline{\lambda}_\alpha(\xi_\alpha-\zeta_\alpha)]=0,$$

其中

$$\lambda_\alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}\right) + i\left(\frac{\partial F}{\partial u_{n+\alpha}}\right)_{u=u_0},$$

$$\xi_\alpha = u_\alpha + u_{n+\alpha},\ (\alpha = 1,\cdots\cdots,n)$$

作酉线性变换

$$\xi_\alpha - \xi_\beta = \sum_{n=1}^{n} u_{\alpha\beta}\eta_\alpha,$$

其中 $u_{\beta\alpha}$ 的选择使得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\beta\alpha}\,\overline{\lambda}\alpha = \begin{cases} a(\text{实数}) > 0, & \text{当 } \beta = 1, \\ 0, & \text{当 } n \geqslant \beta > 1. \end{cases}$$

若这变换把 $\Omega$ 变为 $\Omega^*$，则 $\Omega^*$ 在 $\eta = 0$ 点的超切面为 $a(\eta + \overline{\eta}) = 0$，

如命 $\eta_\alpha = v_\alpha + iv_{\eta+\alpha}$，　$(\alpha = 1,\cdots\cdots,n)$，则 $\Omega^*$ 在 $\eta = 0$ 点的超切面为

$$v_1 = 0.$$

由引理 5.1.2 知

$$\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} K(\zeta,\xi) = \int_{\Sigma_\varepsilon^*(0,\eta)} K(0,\eta),$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} K(\zeta,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon^*(0,\eta)} K(0,\eta) = \frac{1}{2}.$$

公式完全证明. □

注意，由公式(5.1.14)再应用上述证明的第 2° 步就知道

$$\int_{\Omega_\zeta} K(Z,\xi) = 1,\ \text{当 } Z \in D^+.$$

至于公式

$$\int_{\Omega_\zeta} K(Z,\xi) = 0,\ \text{当 } Z \in D^-,$$

那是显然的，因为 $K(Z,\xi)$ 在 $D^+$ 中没有奇点.

*ii*) **公式(5.1.8)的证明**

设 $\zeta = 0$，$\Omega$ 通过原点，假定 $\Omega$ 在原点附近的方程为

$$\Omega: F(u_1, \cdots\cdots, u_{2n}) = 0,$$

由假设 $\Omega$ 是光滑的，即 $\frac{\partial F}{\partial u_k}(k = 1, \cdots\cdots, n)$ 不全为零，我们假设在原点处

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)_{u=0} \neq 0, \ \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)_{u=0} = \cdots\cdots = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{2n}}\right)_{u=0} = 0,$$

换言之，$\Omega$ 在原点的超切面为超平面

$$P: u_1 = 0.$$

由于 $\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)_{u=0} \neq 0$，我们可以把 $\Omega$ 在原点附近的方程写为

$$\Omega: u_1 - \varphi(u_2, \cdots\cdots u_{2n}) = 0.$$

注意，$\varphi$ 仍然有二阶连续偏微商，并且

$$\varphi(0, \cdots\cdots, 0) = 0, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)_{u=0} = \cdots\cdots = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_{2n}}\right)_{u=0} = 0,$$

我们又假定域 $D$ 在原点附近的点在

$$u_1 - \varphi(u_2, \cdots\cdots, u_{2n}) < 0$$

的一边，这时

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\zeta)} |\xi - \zeta|^\alpha |K(\zeta, \xi)| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} A$$

$$\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2\leqslant\varepsilon^2, u_1=\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})} (u_1^2 + u_2^2 + \cdots\cdots + u_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}(2n-\alpha-1)} \cdot$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_{2n}}\right)^2} du_2 \cdots\cdots du_{2n}.$$

其中 $A$ 为常数，取 $\varepsilon$ 充份小使当 $u_1^2 + \cdots\cdots + u_{2n}^2 \leqslant \varepsilon^2$ 时

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_{2n}}\right)^2} < 2$$

得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\zeta)} |\xi - \zeta|^\alpha |K(\zeta, \xi)| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} 2A$$

$$\int_{\varphi^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2\leqslant\varepsilon^2} (\varphi^2 + u_2^2 + \cdots\cdots + u_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}(2n-\alpha-1)} du_2 \cdots\cdots du_{2n},$$

利用球坐标再作变量替换，经过计算，可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\zeta)} |\xi-\zeta|^{\alpha}|K(\zeta,\xi)| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} 4A\pi^{2n-2}M \int_0^{\varepsilon}\frac{1}{v^{1-\alpha}}dv = \lim_{\varepsilon\to 0} 4A\pi^{2n-2}M\frac{1}{\alpha}\varepsilon^{\alpha} = 0,$$

其中 $M$ 为常数.

对于 $\zeta$ 为 $\Omega$ 上任意一点的一般情况，只要施行一酉线性变换化为 $\xi=0$ 的情况，根据引理 5.1.2 即可得证，不再详述(参考公式(5.1.7) 的证明的第 2° 步). □

*iii*) **公式(5.1.9) 的证明**

象上面一样，只考虑 $\zeta=0$ 的情形，以 $\zeta=0$ 为心，$\delta(\delta<\varepsilon)$ 为半径作超球 $B_\delta(0)$，则

$$(5.1.17)\qquad \int_{\sigma_\varepsilon(0,\xi)} K(0,\xi) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon-\sigma_\varepsilon\cap B_\delta(0)} K(0,\xi)$$

由于 $K(0,\zeta)$ 除 $\xi=0$ 外同调于零，故

$$(5.1.18)\qquad \int_{\sigma_\varepsilon-\sigma_\varepsilon\cap B_\delta(0)} K(0,\xi) = \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\delta^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} K(0,\xi) - \int_{\substack{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2\\ u_1-\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})>0}} K(0,\xi),$$

经计算可知，

$$(5.1.19)\qquad \int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2=\delta^2} K(0,\xi) = \frac{1}{2} - \delta(n-1)2^{n-1}i^n\sigma \int_0^{\pi}\sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1\cdots\cdots \int_0^{\pi}\sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3} \int_0^{2\pi} d\theta_{2n-2} \int_0^1 \Phi_5(\delta,v_1,\sqrt{1-v_1},\theta)dv_1;$$

$$(5.1.20)\qquad \int_{u_1^2\cdots+u_{2n}^2=\varepsilon^2} K(0,\xi) = \frac{1}{2} - \varepsilon(n-1)2^{n-1}i^n\sigma \int_0^{\pi}\sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1\cdots\cdots \int_0^{\pi}\sin_{2n-3}d\theta_{2n-3} \int_0^{2\pi} d\theta_{2n-2} \int_0^1 \Phi_5(\varepsilon,v_1,\sqrt{1-v_1},\theta)dv_1,$$

其中 $\Phi_5(\delta,v_1,\sqrt{1-v_1},\theta)$，$\Phi_5(\varepsilon,v_1,\sqrt{1-v_1},\theta)$ 是 $v_1,\theta$ 的连续函数，将(5.1.19)，(5.1.20) 代入(5.1.18)，即得

$$(5.1.21)\qquad \int_{\sigma_\varepsilon(0,\xi)} K(0,\xi) = \varepsilon(n-1)2^{n-1}i^n\sigma \int_0^\pi \sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1 \cdots\cdots \int_0^\pi \sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3} \int_0^{2\pi} d\theta_{2n-2} \int_0^1 \Phi_5(\varepsilon,v_1,\sqrt{1-v_1},\theta)dv_1,$$

由此知

$$(5.1.22)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon(0,\xi)} K(0,\xi) = 0. \square$$

*iv*) **估计式(5.1.10) 的证明**

由于我们已经证明(公式(5.1.7))

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} K(\zeta,\xi) = \frac{1}{2},\zeta \in \Omega$$

故取适当小的 $\varepsilon$，即知估计式(5.1.10) 成立. □

*v*) **估计式(5.1.11) 的证明**

估计式(5.1.11)是显然的，因为被积表达式只在 $\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)$ 上是无界的.

### 5.1.3 具 $B-M$ 核的奇异积分的主值

**定理 5.1.1** 如 $\varphi(\xi)$ 定义在边界 $\Omega$ 上并适合 $H$ 条件，且 $\zeta\in\Omega$，则奇异积分

$$(5.1.3)\qquad \int_{\Omega_\zeta} \varphi(\xi)K(\zeta,\xi)$$

的主值存在.

**证明**

$$(5.2.23)\qquad \int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} \varphi(\xi)K(\zeta,\xi) = \int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} \{\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)\} K(\zeta,\xi) + \varphi(\zeta)\int_{\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)} K(\zeta,\xi),$$

由公式(5.1.7) 知当 $\varepsilon\to 0$ 时上式的第二个积分的极限是存在的，

现在要证明第一个积分当 $\varepsilon \to 0$ 时也存在.

由引理 5.1.3

$$
\begin{aligned}
|\{\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)\}K(\zeta,\xi)| &\leqslant A|\xi-\eta|^{\nu}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\overline{\xi}_\alpha-\overline{\zeta}_\alpha}{|\xi-\zeta|^{2n}}\lambda_\alpha\right|dS_\xi \\
&\leqslant A\frac{1}{|\xi-\zeta|^{2n-\nu}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}|\xi_\alpha-\zeta_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\alpha=1}|\lambda_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}dS_\xi \\
&= \frac{A}{|\xi-\zeta|^{2n-\nu-1}}dS_\xi.
\end{aligned}
$$

此处

$$
A = M(n-1)2^{n-1}|\sigma| = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^n}(n-1)!M
$$

熟知 $2n-1$ 维的积分 $\int_{\Omega_\xi}\frac{1}{|\xi-\zeta|^{\lambda}}dS_\xi$，如 $\lambda < 2n-1$ 是收敛的，由于 $\nu > 0$，所以(5.1.23) 右边第一个积分当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛为普通的瑕积分，故奇异积分(5.1.3) 的主值存在. □

### 5.1.4 $B-M$ 型积分的极限值

**引理 5.1.4** （基本引理）如果密度 $\varphi(\xi)$ 在 $\Omega$ 上满足 Hölder 条件，那末函数

$$
(5.1.24)\qquad \chi(Z) = \int_{\Omega_\xi}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]K(Z,\xi)
$$

是 $\Omega$ 上点 $Z=\zeta$ 的连续函数，即当点 $Z$ 由 $D^+$ 或 $D^-$ 沿任何一路线趋于点 $\zeta$ 时有确定的极限值：

$$
(5.1.25)\quad \lim_{Z\to\zeta}\chi(Z) = \int_{\Omega_\xi}\{\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)\}K(\zeta,\xi) = K(\zeta).
$$

**证明** 为了证明(5.1.24)式，我们只要证明，如果 $Z$ 在 $D^+$ 内部，对任给的 $\varepsilon > 0$，我们总可以找到 $-\delta > 0$，使得当 $|Z-\zeta| < \delta$ 时，恒有

$$
|\chi(Z)-\chi(\zeta)| < \varepsilon
$$

便可以了. 而且我们只要证明(5.1.25) 式当 $Z$ 沿法线趋于 $\zeta$ 时成立，由于 $\Omega$ 是紧致流形，所以利用有限复盖定理即可证明这个极限

是一致成立，那末再根据熟知的 Painlevè 定理就可知道这极限与 $Z$ 趋于 $\zeta$ 时所取的路径无关.

1°. 假定 $\zeta = 0$，$\Omega$ 在 0 点超切面为

$$u_1 = 0,$$

其在 0 点的法线以 $u_1 < 0$ 为正向. 取 $Z$ 点在法线上其坐标为

(5.1.26) $\quad Z_1 = \rho(\rho > 0), Z_2 = 0, \cdots\cdots, Z_n = 0,$

作为 $\zeta = 0 \in \Omega$ 为中心半径为 $\rho$ 的超球

$$B_\rho(0): u_1^2 + \cdots\cdots + u_{2n}^2 \leqslant \rho^2,$$

考虑差

$$\begin{aligned}\chi(Z) - \chi(0) &= \int_{\Omega_\zeta} [\varphi(\xi) - \varphi(0)][K(Z,\xi) - K(0,\zeta)] \\ &= \int_{\Sigma_{\rho(0,\xi)}} [\varphi(\xi) - \varphi(0)][K(Z,\xi) - K(0,\xi)] \\ &\quad + \int_{\sigma_{\rho(0,\xi)}} [\varphi(\xi) - \varphi(0)]K(Z,\xi) \\ &\quad - \int_{\sigma_\rho(0,\xi)} [\varphi(\xi) - \varphi(0)]K(0,\xi) = I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

我们先来估计 $I_2$：

$$|I_2| = \left|\int_{\sigma_\rho(0,\xi)} [\varphi(\xi) - \psi(0)]K(Z,\xi)\right|$$

$$= \left| -(n-1)\sigma\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2 \leqslant \rho^2} [\varphi(\xi) - \varphi(0)] \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \right.$$

$$\left. \frac{\overline{\xi}_\alpha - \overline{\zeta}_\alpha}{|\xi - Z|^{2n}} d\xi \wedge d\overline{Z}_{[\alpha]} \right|$$

$$= \left|(n-1)2^{n-1}\sigma\int_{u_1^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2 \leqslant \rho^2} [\varphi(\xi) - \varphi(0)] \right.$$

$$\left. \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\overline{\xi}_\alpha - \overline{\zeta}_\alpha}{|\xi - Z|^{2n}} \lambda_\alpha\right) dS_\xi \right|,$$

其中 $\lambda_\alpha = u_\alpha + iu_{n+\alpha}$，$u_\alpha$ 为 $\Omega_\xi$ 的面积元素的方向余弦. 由于 $\Omega_\xi$ 是光滑的，注意

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |\lambda_\alpha|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2n} u_\alpha^2 = 1$$

及利用 $H$ 条件

$$|\varphi(\xi)-\varphi(0)|\leqslant M|\xi|^{\nu},0<\nu<1,\ M:\text{Hölder 常数}$$

与 Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{n}(\bar{\xi}_\alpha-\bar{Z}_\alpha)\lambda_\alpha\right|\leqslant\left(\sum_{\alpha=1}^{n}|\bar{\xi}_\alpha-\bar{Z}_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}|\lambda_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|\xi-Z|$$

及

$$dS_\xi=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_{2n}}\right)^2}du_2du_3\cdots\cdots du_n,$$

(注意其中 $\varphi$ 是边界曲面方程 $\Omega: u_1=\varphi(u_2,\cdots\cdots,u_{2n})$ 中的 $\varphi$)，取 $\rho$ 充份小使当 $u_1^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2\leqslant\rho^2$ 时

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_{2n}}\right)^2}<2$$

得

$$|I_2|\leqslant(n-1)2^n|\sigma|M\int_{\varphi^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2\leqslant\rho^2}\frac{(\varphi^2+u_2^2+\cdots+u_{2n}^2)^{\nu/2}}{[(\varphi-\rho)^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_{2n}^2]^{(2n-1)/2}}du_2du_3\cdots\cdots du_{2n}.$$

(注意积分号中的 $\varphi$ 是边界曲面方程中的 $\varphi$).

作变换 $u_2=r\cos\theta_1$, $u_3=r\sin\theta_1\cos u\theta_2,\cdots\cdots,u_{2n}=r\sin\theta_1\cdots\cdots\sin\theta_{2n-3}\sin\theta_{2n-2}$,

$$|I_2|\leqslant(n-1)2^n|\sigma|M\int_0^\pi\cdots\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{\psi^2+r^2\leqslant\rho^2}r^{2n-2}\sin^{2n-3}\theta_1\cdots$$

$$\cdots\sin\theta_{2n-3}\frac{\{[\psi(r,\theta)^2+r^2\}^{\frac{\nu}{2}}}{[(\psi-\rho)^2+r^2]^{(2n-1)/2}}d\theta_1\cdots\cdots d\theta_{2n-2}dr,$$

其中

$$\psi(r,\theta)=\varphi(r\cos\theta_1,\cdots\cdots,r\sin\theta_1\cdots\cdots r\sin\theta_{2n-2}),$$

(其中 $\varphi$ 是边界曲面方程中的 $\varphi$)

由于当 $\theta\leqslant\theta_k\leqslant\pi$ 时 $\sin\theta_k\leqslant1(k=1,2,\cdots\cdots,2n-3)$ 及

$$\frac{1}{[(\psi-\rho)^2+r^2]^{(2n-1)/2}}$$

$$= \frac{1}{[(\psi-\rho)^2+r^2]^{\frac{1}{2}}[(\psi-\rho)^2+r^2]^{n-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{[(\psi-\rho)^2+r^2]^{\frac{1}{2}} r^{2n-2}},$$

故

$$|I_2| \leqslant (n-1)2^{\nu}|\sigma|M \cdot \int_0^{\pi}\cdots\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}$$

$$\int_{\psi^2+r^2\leqslant\rho^2} \frac{([\psi^2+r^2)^{\frac{\nu}{2}}}{[(\psi-\rho)^2+r^2]^{\frac{1}{2}}} d\theta_1\cdots d\theta_{2n-2}dr.$$

作变换

$$v=\sqrt{\psi^2+r^2},$$

由于当 $r=0$ 时 $\psi(r,\theta)=0, \frac{\partial\psi}{\partial r}=0$，故 $\psi(r,\theta)$ 可写成

$$\psi(r,\theta)=r^2\Phi(r,\theta),$$

此处 $\Phi(r,0)=0$ 是 $r,\theta$ 的连续函数. 故

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=0} = \left(\frac{r+\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}}{\sqrt{r^2+\psi^2}}\right)_{r=0} = \left(\frac{1+r\Phi\frac{\partial\psi}{\partial r}}{\sqrt{1+r^2\Phi^2}}\right)_{r=0} = 1.$$

所以上面的变换在原点附近是有意义的，并有逆变换

$r=v+\Psi(v,\theta)$，且 $\Psi(0,\theta)=0, \left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)_{r=0}=0$，故当 $\rho$ 充份小时

$\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| = \left|1+\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right| \leqslant M_1$，$M_1$ 为一常数

又由于 $\psi(r,\theta)$ 为一连续函数，故有

$$\frac{(\psi^2(r,\theta)r^2)^{\nu/2}}{\sqrt{(\psi-\rho)^2+r^2}} = \frac{(\psi^2(r,\theta)+r^2)^{\nu/2}}{(\psi^2+r^2-2\rho\psi+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{v^{\nu}}{(v^2-2\rho\psi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{v^{\nu}}{v(1-\rho\psi_1)^{\frac{1}{2}}} \leqslant M_2 v^{\nu-1}, M_2 \text{ 为一常数},$$

因此

$$|I_2| \leqslant (n-1)2^{\nu}|\sigma|MM_1M_2 2\pi^{2n-2} \int_0^{\rho} v^{\nu-1}dv$$

$= \frac{1}{\nu}(n-1)2^{n-1}|\sigma|MM_1M_2 2\pi^{2n-2}\rho^{\nu}$

$= N_1\rho^{\nu}$, $N_1$ 为一常数，

于是只要取 $\rho < (\frac{\varepsilon}{3N_1})^{\frac{1}{\nu}}$，就有 $|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

同样可得

$$|I_3| \leqslant N_2\rho^{\nu}, N_2 \text{ 为一常数},$$

因此只要取 $\rho < (\frac{\varepsilon}{3N_2})^{\frac{1}{\nu}}$，就有 $|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$.

对于积分 $I_1$，因为在曲面 $\Sigma_\rho(0,\xi)$ 上 $\xi \neq 0$，故积分 $I_1$ 是 Z 的连续函数，因此存在 $-\delta_1 > 0$，使得当 $|Z| < \delta$ 时

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此如选取 $\delta = \min\{(\frac{\varepsilon}{3N_1})^{\frac{1}{\nu}}, (\frac{\varepsilon}{3N_2})^{\frac{2}{\nu}}, \delta_1\}$，那么当 $|Z| < \delta$ 时就有

$$|\chi(Z) - \chi(0)| < \varepsilon.$$

2° 现在证明一般的情况，酉变换

$$\xi_\beta - \zeta_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha\beta}\overset{*}{\xi}_\alpha (\beta = 1, \cdots\cdots, n)$$

把点 $\xi = \zeta$ 变为 $\overset{*}{\xi} = 0$，把 $\Omega$ 变为 $\overset{*}{\Omega}$，而 $\overset{*}{\Omega}$ 在 0 点的超切面为

$$\overset{*}{u}_1 = 0,$$

其中 $\overset{*}{u}_\alpha + i\overset{*}{u}_{n+\alpha} = \overset{*}{\xi}_\alpha (\alpha = 1, \cdots\cdots, n)$. 命 Z 经这线性变换后对应点为 $\overset{*}{Z}$，又命

$$\Phi(\overset{*}{\xi}) = \varphi(\xi) = \varphi(\zeta_1 + \sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha 1}\overset{*}{\xi}_\alpha, \cdots\cdots, \zeta_n + \sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha n}\overset{*}{\xi}_\alpha)$$

由引理 5.1.2 知

$$K(Z,\xi) = K(\overset{*}{Z}, \overset{*}{\xi}),$$

故

$$\chi(Z) = \int_{\Omega_\zeta} [\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)] K(Z,\xi)$$

$$= \int_{\overset{*}{\Omega}_\zeta} [\Phi(\overset{*}{\xi}) - \Phi(0)] K(\overset{*}{Z}, \overset{*}{\xi}) \overset{\text{记}}{=\!=} \chi(\overset{*}{Z}),$$

$$\chi(Z)-\chi(\zeta)=\int_{\Omega_\zeta}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)][K(Z,\xi)-K(\zeta,\xi)]$$

$$=\int_{\dot{\Omega}_{\dot{\zeta}}}[\Phi(\overset{*}{\xi})-\Phi(0)][K(\overset{*}{Z},\overset{*}{\xi})-K(0,\overset{*}{\xi})]$$

$$=\chi(\overset{*}{Z})-\chi(0),$$

由 1° 知对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|\overset{*}{Z}|<\delta$ 时

$$|\chi(\overset{*}{Z})-\chi(0)|<\varepsilon,$$

故有对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $|Z-\zeta|<\delta$ 时

$$|\chi(\overset{*}{Z})-\chi(\zeta)|<\varepsilon.$$

**定理 5.1.2** 如 $\Omega$ 为可定向光滑的属于 $C^{(2)}$ 类的流形,$\varphi(\xi)$ 为在 $\Omega$ 上定义的连续复值函数,且 $\varphi(\xi)\in H(\alpha,\Omega)$ 那末对于 $B-M$ 型积分

$$(5.1.27)\qquad \Phi(Z)=\int_{\Omega_\zeta}\varphi(\xi)K(Z,\xi),Z\in D,$$

我们有

$$(5.1.28)\qquad \Phi^+(\zeta)=V.P.\int_{\Omega_\zeta}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta),$$

$$(5.1.29)\qquad \Phi^-(\zeta)=V.P.\int_{\Omega_\zeta}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta),$$

$$(5.1.30)\qquad \Phi^+(\zeta)-\Phi^-(\zeta)=\varphi(\zeta),$$

其中 $\Phi^+(\zeta)$ 与 $\Phi^-(\zeta)$ 分别表示 $\Phi(Z)$ 当 $Z$ 从 $D^+$ 和从 $D^-$ 趋于点 $\zeta\in\Omega$ 时的极限.

陆启铿,钟同德[1957],R. Harvey & B. Lawson[1975]).

**证明** 考虑基本引理 5.1.4 中的函数

$$(5.1.24)\quad \chi(Z)=\int_{\Omega_\zeta}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]K(Z,\xi)$$

当 $Z$ 从 $D^+$ 和 $D^-$ 趋于 $\zeta$ 时的极限,利用公式(5.1.7) 我们有

$$\chi^+(\zeta)=\lim_{Z\to\zeta^+}\int_{\Omega_\zeta}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]K(Z,\xi)=\Phi^+(\zeta)-\varphi(\zeta),$$

$$\chi^-(\zeta)=\lim_{Z\to\zeta^-}\int_{\Omega_\zeta}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]K(Z,\xi)=\Phi^-(\zeta),$$

$$\chi(\zeta) = \int_{\Omega_\zeta} [\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)] K(Z,\xi) = \Phi(\zeta) - \frac{1}{2}\varphi(\zeta).$$

因按基本引理 5.1.4，函数 $\chi(Z)$ 是连续的，那么上述三个等式相等，即

$$\Phi^+(\zeta) - \varphi(\zeta) = \Phi^-(\zeta) = \Phi(\zeta) - \frac{1}{2}\varphi(\zeta),$$

由此得到公式(5.1.28)，(5.1.29) 和(5.1.30). □

公式(5.1.28)，(5.1.29) 和(5.1.30) 也和单复变数一样称为 Софоцкий-**Plemelj 公式**，有时称为 **Plemelj 公式**，特别是公式(5.1.30) 有时称为**BM 变换的跳跃公式**. 在 $n = 1$ 的情形是分别由 Ю. В. Сохоцкий[1873] 和 1873 年和 J. Plemelj[1908] 在 1908 年在类似的条件下得到的，晚些时候，在更一般的条件下，И. И. ПриваΛов[1950] 得到了这些公式，以上我们介绍的基本上和 И. И. ПриваΛов 的条件是一样的.

**定理 5.1.3** 如果 $B - M$ 型积分(5.1.27) 的密度 $\varphi(\xi) \in H(\alpha,\Omega)$ 那么有 $\Phi(\zeta) \in H(\alpha,\Omega)$ 和 $\Phi^\pm(\zeta) \in H(\alpha,\Omega)$. **证明**. 见 В. А. Какичев[1959].

定理 5.1.2 和定得 5.1.3 在多复变函数的全纯开拓和 $\bar{\partial}_b$- 方程的解的积分表示等方面有许多应用，例如参见 R. Harvey & B. lawson[1975]，E. M. Чирка[1975]，R. Harvey & J. Polking[1979]，L. A. Aizenberg & A. P. Yuzhakov[1983]，R. M. Range[1986]

## § 5.2 全纯开拓的 Hartogs-Bochner 定理

本节我们讨论给定在边界 $\partial D$ 上的函数和$(p,q)$ 型外微分式全纯开拓到区域 $D$ 内的问题.

**5.2.1 函数的情形** (I. A. Aizenberg & A. P. Yuzhakov [1983])

**引理 5.2.1** (keldysh 和 Lavrent'ev)

由形如

$$\frac{1}{|\zeta - Z|^{2n-2}}, \zeta \in K,\ Z \in C^n/K$$

的分式所生成的线性流形，在空间 $C(K)$ 是稠密的，其中 $K$ 是 $C^n$ 中的一紧致集，它的 Lebesgue 总测度为零，又 $n > 1$.

**证明** 由 Stone-Weierstrass 定理，可以假设 $f \in C^{(1)}(K)$. 将 $f$ 拓展为某一闭球 $\overline{B}$ 上的光滑函数，而 $B \supset K$，并且在 $B$ 上 $f$ 可用光滑函数的 Bochner-Martinelli 公式(4.6.7)(注意只要假设 $f \in C^{(1)}(\overline{D})$ 公式(4.6.7) 就成立) 表示：

$$(5.2.1)\int_{\partial B} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}) - \int_B \overline{\partial} f(\zeta) \Lambda \omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}) = \begin{cases} f(Z),\ Z \in D, \\ 0\ , Z \overline{\in} \overline{D}. \end{cases}$$

如果我们将(5.2.1) 中第二个积分的积分域 $B$ 用 $B\backslash U$ 代替，其中 $U$ 是 $K$ 的一个邻域，它的体积充份小，并且积分本身用适当的积分来代替，然后利用这样的事实：形式 $\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z})$ 的系数是 Laplace 方程的基本解

(5.2.2) $g(\zeta, Z) = (1 - n)^{-1} |\zeta - Z|^{2-2n}$ 的导数，并且将 $g$ 的导数用 差商来代替，我们就得到所要求的分式的线性组合它在 $K$ 上一致逼近 $f$. □

**定理 5.2.1** (Aronov 和 Kytmanov) 如果 $D$ 是 $C^n$ 中的一有界域，它的边界是逐块光滑的，又对某 一 $f \in C^{(1)}(\overline{D})$，Bochner — Martinelli 积分表示(4.1.1) 成立，那末 $f \in A(D)$.

**证明** 考虑 $B - M$ 型积分

$$(5.2.3)\quad F^{\pm}(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}), Z \in D^{\pm},$$

那末在 $D$ 内 $F^+ \equiv f$. 再由跳跃公式(参见(5.1.30))

$$(5.2.4)\qquad F^+(Z) - F^-(Z) = f(Z),\ Z \in \partial D$$

可知 $F^- |_{\partial D} = 0$. 注意 $F^-$ 在 $D^-$ 内是调和的并且在无穷远有 $2n-1$ 阶零点. 由调和函数的唯一性定理.

$$(5.2.5) \qquad F^-(Z) = 0,\ Z \in D^-$$

由于 $f$ 可用公式(4.1.1)表示，所以它在 $D$ 内调和．现将它用对调和函数的 Green 公式表示：

$$(5.2.6) \qquad \int_{\partial D} [f\omega + g(\zeta, Z)\nu_f(\zeta)] = \begin{cases} f(Z),\ Z \in D, \\ 0,\ Z \overline{\in} \overline{D}, \end{cases}$$

其中

$$\nu_f(\zeta) = (n-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta_{[k]} \wedge \bar{\zeta}.$$

这个“复”Green 公式可以类似于“实”Green 公式那样证明．由(4.1.1)和(5.2.6)可知

$$(5.2.7) \qquad \int_{\partial D} \frac{\nu_f(\zeta)}{|\zeta - Z|^{2n-2}} = 0,\ Z \in D.$$

比较(5.2.5)和(5.2.6)可知(5.2.7)对点 $Z \in D^-$ 也成立．将引理5.2.1应用到紧集 $\partial D$，表明 $\nu_f(\zeta)|_{\partial D} = 0$.

函数 $f$ 在 $D$ 是调和的；所以 $d\nu_f(\zeta) = C\triangle f d\zeta \Lambda d\bar{\zeta} = 0$，即形式 $\nu_f$ 在 $D$ 是闭的，因此 $d(\overline{f(\zeta)} \times \nu_f(\zeta))$ 并可以连续拓展到 $\overline{D}$. Stokes 公式给出

$$(2i)^n \quad \int_D c \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} \right| d_v = \int_D d(\overline{f(\zeta)} \cdot \nu_f(\zeta))$$

$$= \int_{\partial D} \overline{f(\zeta)} \nu_f(\zeta) = 0.$$

从此式和导数 $\partial f / \partial \bar{\zeta}_k (k = 1, \cdots, n)$ 的连续性可知这些导数在 $D$ 等于零，也就是 $f$ 在 $D$ 是全纯的．

下述定理是定理 5.2.1 的一个简单推论．

**定理 5.2.2** (Aronov 和 Kytmanov)．命 $D$ 为 $C^n$ 中的一有界域其边界 $\partial D \in C^{(3)}$ 是 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，并命 $f \in C^{(1)}(\partial D)$．当且仅当，对 $Z \in C^n \setminus \overline{D}$

$$(5.2.8) \qquad \int_{\partial D} f(\zeta) \omega(\zeta - Z, \bar{\zeta} - \bar{Z}) = 0,$$

存在 $F \in C^{(1)}(\overline{D})$ 在 $D$ 全纯并使得 $F|_{\partial D} = f$．如果 $C^n \setminus D$ 是连结的，只

要(5.2.8)对 $Z \in \{W: |W_i| > R, i = 1, \cdots, n\}$ 成立，其中 $R$ 是一充分大的正数.

如果条件(5.2.8)满足，那末拓展函数可以明确地表为

$$F(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}), Z \in D^+. \tag{5.2.9}$$

**证明 第一部分. 条件(5.2.8)的充分性**：假设条件(5.2.8)满足；对给定的函数 $f \in C^{(1)}(\partial D)$ 定义

$$F^{\pm}(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}), Z \in D^{\pm}.$$

那末我们有

$$F^{-}(Z) = 0,\ Z \in D^{-};$$

$$F^{+}(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}), Z \in D^{+}.$$

用定理5.1.3同样的方法可以证明 $F^+(Z) \in C^{(1)}(\overline{D})$ 并且 $F^+|_{\partial D} = f$；由定理 5.2.1，$F^+(Z) \in A(D)$. 置 $F^+(Z) = F(Z), Z \in D^+$；这就是所要求的拓展函数.

**条件(5.2.8)的必要性**：假设存在一函数 $F \in C^{(1)}(\overline{D})$，在 $D$ 全纯并且使得 $F|_{\partial D} = f$. 那末由 Bochner — Martinelli 公式

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}) = \begin{cases} F(Z),\ Z \in D^+ \\ 0\ ,\ Z \overline{\in} D^+ \end{cases}$$

由此立知条件(5.2.8)成立.

**第二部分.** 由 Bochner — Martinelli 型积分

$$F^{\pm}(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta - Z, \overline{\zeta} - \overline{Z}), Z \in D^{\pm}$$

定义的函数 $F^-(Z)$ 在 $D^- = C^n \backslash D^+$ 是调和的. 因此如果 $C^n \backslash \overline{D}$ 是连结的，并且(5.2.8)对 $Z \in \{W: |W_i| > R, i = 1, \cdots, n\}$ 成立，其中 $R$ 是一充份大的正数，那末由调和函数的唯一性定理立知

$$F^{-}(Z) \equiv 0,\ Z \in C^n \backslash \overline{D}$$

即条件(5.2.8)成立. □

**定理 5.2.3**(Bochner). 假设 $D$ 是 $C^n$ 中的一有界域，$\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 类

的光滑可定向流形，$C^n\backslash D$ 是连结的，$n>1$，又 $f\in C^{(1)}(\partial D)$. 当且仅当 Severi 条件(切线 Canchy — Riemann 方程)

(5.2.10) $$df\wedge d\zeta|_{\partial D}=0$$

成立时，存在一函数 $F\in A(D)\cap C^{(1)}(\overline{D})$ 使得 $F|_{\partial D}=f$.

**证明** 条件的必要性，从 Canchy — Riemann 条件 $\partial F/\partial\overline{\zeta}_k=0$，$k=1,\cdots n$，立可得知. 证明条件充份性，我们可以利用前一定理. 注意 $\omega(\zeta-Z,\overline{\zeta}-\overline{Z})$ 是一闭形式(参考引理 5.1.1)，即

$$d\omega(\zeta-Z,\overline{\zeta}-\overline{Z})=0$$

所以存在 $-(n,n-2)$ 形式 $\Omega(\zeta,Z)$ 使

(5.2.11)

$$\omega(\zeta-Z,\overline{\zeta}-\overline{Z})=d_\zeta\Omega(\zeta,Z)$$

不难具体写出形式 $\Omega(\zeta,Z)$ 就是

$$\Omega(\zeta,Z)=\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{|\zeta-Z|^{2n-2}}\frac{\overline{\zeta}_k-\overline{Z}_k}{\zeta_1-Z_1}d\,\overline{\zeta}_{[1,k]}\Lambda d\zeta.$$

命 $R>0$ 使 $D\subset B(o,R)$，$B$ 为以 $o$ 为心，$R$ 为半径的超球.

当 $Z\in\{W:|W|>R\}$ 和 $\zeta\in\partial D$ 时，

形式 $\Omega$ 没有奇性. 由 Stokes 公式，(5.2.10) 和(5.2.11) 可知

$$\int_{\partial D}f(\zeta)\omega=\int_{\partial D}f(\zeta)d_\zeta\Omega=\int_{\partial D}d_\zeta[f(\zeta)\Omega]=0.$$

再应用定理 5.2.2 即得所证. □

设 $\alpha\in C^{(1)}_{p,q}(\partial D)$，那末 $C_{p,q+1}(\partial D)$ 中由将 $\overline{\partial}\alpha$ 限制在 $\partial D$ 上所得的形式记为 $\overline{\partial}_b\alpha$. 不难证明 $\overline{\partial}_b\alpha$ 不依赖于 $\alpha$ 在 $D$ 内拓展函数 $\tilde{\alpha}$. 引用这个记号，Severi 条件(切线 Canchy — Riemann 方程) (5.2.10) 可写成

(5.2.10)′ $$\overline{\partial}_bf=0.$$

**定义 5.2.1** ($CR$ — 函数) 命 $U$ 为 $\partial D$ 的一个开集. 函数 $f\in C^{(1)}(U)$ 称为 $U$ 上的 $CR$ — **函数**(Cauchy — Riemann 函数)，如果对所有的 $\zeta\in U$，$f$ 满足

(5.2.12) $$\partial_bf=0.$$

根据 $CR$ — 函数的定义，定理 5.2.3 可表达为

**定理 5.2.3′** 假设 $D$ 是 $C^n$ 的一有界域，$\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，$C^n\setminus\overline{D}$ 是连结的，$n>1$. 那末 $\partial D$ 上每一个 $C^{(1)}$ 类的 $CR$－函数都可连续开拓到 $D$ 上的一个全纯函数，其逆亦真.

**定理 5.2.4** (Hartogs，Osgood 和 Braun) 假设 $D$ 是一有界域，$C^n\setminus\overline{D}$ 是连结的，又 $n>1$. 每在一 $\partial D$ 全纯的函数 $f(Z)$(即在某一邻域 $U(\partial D)$ 全纯) 都可全纯开拓到整个 $D$.

**证明** 选择一区域 $D'$ 使得 $\partial D'$ 是 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，$D'\subset D$，$\partial D'\subset U(\partial D)$ 并且 $C^n\setminus\overline{D'}$ 也是连结的，函数 $f(Z)$ 在 $\partial D'$ 上是全纯的；所以在 $\partial D'$ 上切线 Cauchy－Riemann 方程成立. 由定理 5.2.3，存在一函数 $F\in A(D')\cap C^{(1)}(\overline{D'})$ 使得 $F|_{\partial D'}=f$. 剩下要证明在 $U(\partial D)\cap D'$ 上，$F=f$. 这件事是对的，首先因为它们在 $\partial D'$ 上一致，其次因为一个不恒等于零的全纯函数的零点不能充满－$(2n-1)$ 维的连续实曲面(例如参见 Б. А. Фукс[1962] 定理 4.7). □

证明这个定理时可以假设 $\partial D'$ 是 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，目的是为了利用上面所证明的定理 5.2.3.

### 5.2.2 $C^n$ 中 $\overline{\partial}_b$ 闭形式的开拓(钟同德[1988])

命 $u$ 和 $v$ 为定义在 $C^n\times C^n$ 的开集上的向量函数，$(Z,\zeta)$ 为 $C^n\times C^n$ 中的变量，命

$$\omega_{Z,\zeta}(u)=\bigwedge_{j=1}^{n}d_{Z,\zeta}u_j$$

(5.2.13)
$$\overline{\omega'}_{Z,\zeta}(v)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\bigwedge_{k\neq j}\overline{\partial}_{Z,\zeta}v_k$$

$$\langle u,v\rangle=\sum_{j=1}^{n}u_jv_j$$

那末 $C^n\times C^n$ 中的 Bochner－Martinelli 核可以表为

(5.2.14)

$$K_{BM}(Z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\overline{\omega'}_{Z,\zeta}(\overline{Z}-\overline{\zeta})\wedge\omega_{Z,\zeta}(Z-\zeta)}{|Z-\zeta|^{2n}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}$$

$$\frac{\langle \overline{Z}-\overline{\zeta}, d_{Z,\zeta}(Z-\zeta)\rangle \wedge (\langle \overline{\partial}_{Z,\zeta}(\overline{Z}-\overline{\zeta}), d_{Z,\zeta}(Z-\zeta)\rangle)^{n-1}}{|Z-\zeta|^{2n}}.$$

利用这个核，则定义在区域$\overline{D}$上的光滑$(p,q)$型微分形式就可用Koppelman公式来表示(参考定理4.10.1和定理4.15.1).

记

(5.2.15) $$K_{BM}(Z,\zeta) = \sum_{\substack{0\leqslant q\leqslant n\\ 0\leqslant q\leqslant n-1}} K_q^p(Z,\zeta)$$

并命

(5.2.16) $$K_{-1}^p(Z,\zeta) = K_n^p(Z,\zeta) = 0,$$

其中$K_q^p(Z,\zeta)$是$K_{BM}(Z,\zeta)$的分量，关于Z是$(p,q)$型的，关于$\zeta$是$(n-p,n-q-1)$型的.

**引理 5.2.2**

(5.2.17) $$\overline{\partial}_{Z,\zeta}K_{B,M} = 0$$

并且

(5.2.18) $$\overline{\partial}_\zeta K_q^p = -\overline{\partial}_Z K_{q-1}^p, p,q = 0,1,\cdots n,$$

因此

(5.2.19) $$\overline{\partial}_\zeta K_o^p = \overline{\partial}_Z K_{n-1}^p = 0.$$

**证明** 由于

(5.2.20) $$\overline{\partial}_{Z,\zeta}K_{BM}(Z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}n\bigwedge_{j=1}^n \overline{\partial}_{Z,\zeta}\frac{\overline{Z}_j-\overline{\zeta}_j}{|Z-\zeta|^{2n}}\wedge \omega_{Z,\zeta}(Z-\zeta)$$

和

$$\sum \frac{(\overline{Z}_j-\overline{\zeta}_j)}{|Z-\zeta|^2}(Z_j-\zeta_j) = 1,$$

那末

$$\bigwedge_{j=1}^n \overline{\partial}_{Z,\zeta}\frac{\overline{Z}_j-\overline{\zeta}_j}{|Z-\zeta|^{2n}} = 0$$

再和(5.2.20)一起，就立即得到(5.2.17).□

命 $D$ 为 $C^n$ 中的一有界域，它的边界 $\partial D$ 是连结的. 假设 $n>1$，$f$ 为 $\partial D$ 上的 $(p,q)$ 型微分形式，我们有

**引理 5.2.3** 如果 $f$ 是 $\bar{\partial}_b$ — 闭的，那末

(5.2.21) $$\int_{\partial D} f \wedge \bar{\partial}\theta = 0,$$

其中 $\theta$ 是 $\partial D$ 的某一邻域中的任一 $(n-p, n-q-2)$ 型微分形式.

**证明** 由于

(5.2.22) $$\bar{\partial}\theta|_{\partial D} = \bar{\partial}_b\theta + \overline{N}^* \wedge (\bar{\partial}\theta)_n,$$

其中 $(\bar{\partial}\theta)_n$ 是 $\bar{\partial}\theta$ 限制在 $\partial D$ 上的复法部份，$\overline{N}$ 是 $\partial D$ 的法向量，$\overline{N}^*$ 是 $\overline{N}$ 对偶. 对任何在 $\partial D$ 的邻域可微的 $(n,n-2)$ 形式 $\Omega^{(n,n-2)}$，我们有

(5.2.22) $$\int_{\partial D} \Omega \overline{N}^* = 0.$$

由假设 $f$ 是 $\bar{\partial}$ — 闭的，由(5.2.22)得

$$\int_{\partial D} f \wedge \bar{\partial}\theta = \int_{\partial D} f \wedge (\bar{\partial}_b\theta + \overline{N}^* \wedge (\partial\theta)_n) = \int_{\partial D} f \wedge \bar{\partial}_b\theta$$

$$+ \int_{\partial D} f \wedge \overline{N}^* \wedge (\bar{\partial}\theta)_n$$

$$= \int_{\partial D} f \wedge \bar{\partial}_b\theta = \int_{\partial b} \bar{\partial}_b(f \wedge \theta),$$

由 stokes 公式我们有(5.2.21). □

**定理 5.2.5** 命 $D$ 为 $C^n$ 中的一有界域，$\partial D$ 是连结的，$n>1$，$f$ 是 $\partial D$ 的某一邻域中的 $C^\infty(p,q)$ 型微分形式. $F(Z)$ 是由

(5.2.23) $$F(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta) K_q^p(Z,\zeta)$$

定义的，那末

(1) 当 $1 \leqslant q \leqslant n-2$，$\bar{\partial}_b f = 0$，$F$ 定义一 $C^n \backslash \partial D$ 上的 $C^\infty$，$\bar{\partial}$ — 闭形式.

(2) 当 $q = n-1$，$F$ 定义 — $C^n \backslash \partial D$ 上的 $C^\infty$，$\bar{\partial}$ — 闭形式.

(3) 当 $q = 0$，$\bar{\partial}_b f = 0$，$F$ 在 $D^+$ 上是 $\bar{\partial}$ — 闭的，并且在 $C^n \backslash \overline{D}$ 上恒等于 0，如果 $C^n \backslash \overline{D}$ 是连结的.

**证明**

(1) 当 $1 \leqslant q \leqslant n-2$，且 $Z \in C^n \setminus \partial D$ 由 (5.2.18) 和引理 5.2.3 可知

$$\bar{\partial}_Z F(Z) = \bar{\partial}_Z \int_{\partial D} f K_q^p(Z,\zeta) = \int_{\partial D} f \bar{\partial}_Z K_q^p(Z,\zeta)$$

$$= \int_{\partial D} f \bar{\partial}_\zeta K_{q+1}^p(Z,\zeta) = 0.$$

(2) 当 $q = n-1$，由 (5.2.19) 显然有

$$\bar{\partial}_Z F(Z) = \int_{\partial D} f \bar{\partial}_Z K_{n-1}^p(Z,\zeta) = 0, \forall\ Z \in C^n \setminus \partial D.$$

(3) 当 $q = 0$. 由 (5.2.18) 和引理 5.2.3，也得到

$\bar{\partial}_Z F(Z) = \int_{\partial D} f \bar{\partial}_Z K_o^p(Z,\zeta) = 0, \forall\ Z \in C^n \setminus \partial D$. 然而，对 $Z \in C^n \setminus \overline{D}$，$\bar{\partial}_\zeta K_o^p(Z,\zeta) = 0$，那末存在一 $(n-p, n-q-2)$ 形式 $\Omega(Z,\zeta)$ 使得

(5.2.24) $$K_o^p(Z,\zeta) = \bar{\partial}_\zeta \Omega(Z,\zeta).$$

命 $R > 0$，使得 $D \subset B(0,R)$，在此 $B(0,R)$ 是中心在原点 $o$，半径是 $R$ 的超球. 对 $Z \in \{W : |W| > R\}$ 和 $\zeta \in \partial D$，微分形式 $\Omega$ 没有奇性，由 Stokes 定理，(5.2.24) 和假设 $\bar{\partial}_b f = 0$，可知

$$F(Z) = \int_{\partial D} f(\zeta) K_o^p(Z,\zeta) = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_\zeta \Omega$$

$$= \int_{\partial D} \bar{\partial}_\zeta [f(\zeta)\Omega] = 0, \forall\ Z \in C^n \setminus \overline{D}. \square$$

**引理 5.2.4** 命 $D$ 为 $C^n$ 中的一有界域，$\partial D$ 是一 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，$\partial D$ 将 $C^n \setminus \partial D$ 分为两部份 $D^+ = D$ 和 $D^- = C^n \setminus \overline{D}$. $f(\zeta)$ 是 $\partial D$ 上的一 $(p,o)$ 型微分形式，并且在 $\partial D$ 上满是 Hölder 条件或者 $f \in C^{(1)}(\partial D)$.

(5.2.25) $$\int_{\partial D} f(\zeta) K_o^p(Z,\zeta) = \begin{cases} F^+(Z), & Z \in D^+ \\ F^-(Z), & Z \in C^n \setminus \overline{D}^+ = D^- \end{cases}$$

定义一微分形式的 Cauchy 型积分. 那末我们有 Plemelj 跳跃公式

(5.2.26) $$F^+ - F^- = (-1)^p f.$$

而且极限形式 $F^+, F^-$ 在 $\partial D$ 上也满足 Hölder 条件或者属于 $C^{(1)}(\partial D)$.

**证明** 类似于函数情形的 Cauchy 型积分(参考定理 5.1.2).

**定理 5.2.6** 命 $D$ 为 $C^n$ 中的一有界域，$\partial D\in^{(2)}$ 并且是光滑可定向的，$C^n\setminus\overline{D}$ 是连结的，$n>1$，并有一 $(p,o)$ 型微分形式 $f\in C^{(1)}(\partial D)$，如果 $\overline{\partial}_b f=0$，那末存在一 $(p,o)$ 型微分形式 $F\in A(D)\cap C^{(1)}(D)$ 使得 $F|_{\partial D}=(-1)_p f$.

**证明** 由定理 5.2.5 可知 $F^+(Z)$ 在 $D$ 是全纯的，$F^-(Z)$ 在 $C^n\setminus\overline{D}$ 是恒等于 0 的. 由 Plemelj 公式(5.2.26)立知 $F^+=(-1)^p f$. □

1906 年 F. Hartogs[1906]提出了一个著名的 Hartogs 定理，即在 $\partial D$ 的某一邻域全纯的函数都可全纯开拓到 $\overline{D}$ 的一个邻域去. S. Bochner[1943]知 E. Martinelli[1942]独立地严格的证明了这个定理. S. Bochner 进一步指出一个在 $\partial D$ 上定义的光滑函数，如果满足 $\overline{\partial}_b f=0$，那末 $f$ 可以开拓成为一个在 $D$ 上全纯在 $\overline{D}$ 光滑的函数，60 年代以后 $\overline{\partial}b$ — 方程和 $\overline{\partial}$ — 方程都是多复变数中研究的热门课题. 近二十年来许多人对 Hartogs 定理进行了研究，一方面以各种不同的方法加以证明，一方面在各种不同的意义下加以拓广. 关于这方面的情况在 R. Harvey & B. Lawson[1975]和 R. M. Range[1986]中列出了许多文献可供参考.

## § 5.3 Stein 流形上的 Plemelj 公式和全纯开拓

### 5.3.1 Plemelj 公式

**定理 5.3.1**(Plemelj 公式). 设 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 上的一相对紧区域，$D$ 的边界 $\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形. 对 $D$ 上的 Bochner—Martinelli 公式 (4.13.33)，我们可定义 —Bochner—Martinelli 型积分

$$(5.3.1)\quad \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^\nu,\overline{S},S)=\begin{cases}F^+(z),z\in D:=D^+\\ F^-(z),z\in M\setminus\overline{D}:=D^-\end{cases}$$

其中

$$\Omega(\varphi^\nu,\overline{s},s)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\varphi^\nu(z,\zeta)\omega'\left(\frac{\overline{S}(z,\zeta)}{|S(z,\zeta)|^2}\right)\omega(S(z,\zeta)),f(\zeta)$$

是定义在$\partial D$上的连续复值函数，又$f(\zeta) \in H(\alpha,\partial D)$，$0<\alpha<1$，对Bochner—Martinelli 型积分(5.3.1)，**Plemelj 公式**

$$(5.3.2)\quad F^{+}(\eta) = V.P.\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu},\overline{S},s) + \frac{1}{2}f(\eta),\ \eta \in \partial D,$$

$$(5.3.3)\quad F^{-}(\eta) = V.P.\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu},\overline{S},S) - \frac{1}{2}f(\eta),\quad \eta \in \partial D,$$

成立，其中$F^{+}(\eta)$和$F^{-}(\eta)$表示$F^{+}(z)$和$F^{-}(z)$当$Z$分别从$D^{+}$和$D^{-}$趋于$\eta \in \partial D$时的极限，又$V.P.\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu},\overline{S},S)$由(5.3.30)定义(见下面).

从(5.3.2)和(5.3.3)立得**Plemelj 跳跃公式**

$$(5.3.4)\qquad F^{+}(\eta) - F^{-}(\eta) = f(\eta),\ \eta \in \partial D.$$

而且$F^{\pm}(z) \in H(\alpha,\partial D)$，又如果$\partial D \in C^{(k)}(1 \leqslant k \leqslant \infty)$，$f \in C^{(\gamma)}$，$(0 \leqslant \gamma \leqslant k)$，那末$F^{+}(z) \in C^{(\gamma)}(\overline{D}^{+})$，$F^{-}(z) \in C^{(\gamma)}(\overline{D}^{-})$.（钟同德[1987C]，林亚先[1985]）.

**证明** 假设$\{U_j\}$是$M$的一局部有限复盖，不妨假设它们就是由坐标邻域组成，对一固定的$\eta \in \partial D$，取$\delta > 0$使得$W_\eta = S(\eta,)$：$V_{\eta\delta} \to B_\delta = \{\zeta^* \in C^n : |\zeta^*| < \delta\}$是一双全纯映射，其中$V_{\eta\delta} \subset U_j$是$\eta$的一个小邻域·记$H = W_\eta(V_{\eta\delta} \cap \partial D)$，它是$B_\delta$中通过$O$的超曲面.当$Z \in V_{\eta\delta} \cap D$充份靠近$\eta$时，存在一$z^* \in W_\eta(V_{\eta\delta} \cap D)$使得$Z = W_\eta^{-1}(z^*)$.由定义

$$(5.3.5)\quad F^{+}(z) = \int_{\partial D \setminus V_{\eta\delta}} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu},\overline{S},S) + \int_{\zeta^* \in H} \hat{f}(\zeta^*)\Omega(\varphi^{\nu},\hat{\overline{S}},\hat{S})(\zeta^*),$$

其中

$$(5.3.6)\qquad \Omega(\varphi^{\nu},\hat{\overline{S}},\hat{S})(\zeta^*) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\hat{\varphi}^{\nu}(z^*,\zeta^*)$$

$$\omega'\left(\frac{\overline{\hat{S}}(z^*,\zeta^*)}{|\hat{S}(z^*,\zeta^*)|^2}\right)\wedge\omega(\hat{S}(z^*,\zeta^*)),$$

又

$$(5.3.7)\qquad \begin{aligned}&\overline{\hat{S}}(z^*,\zeta^*)=\overline{S}(W_\eta^{-1}(z^*),W_\eta^{-1}(\zeta^*)),\\&\hat{S}(z^*,\zeta^*)=S(W_\eta^{-1}(z^*),W_\eta^{-1}(\zeta^*)),\\&\hat{\varphi}(z^*,\zeta^*)=\varphi(W_\eta^{-1}(z^*),W_\eta^{-1}(\zeta^*)),\\&\hat{f}(\zeta^*)=f(W_\eta^{-1}(\zeta^*)),\end{aligned}$$

显然,(5.3.5) 右端的第一项是一正常积分.

现在我们研究(5.3.5) 右端的第二项. 由于

(5.3.8) $\hat{S}(\cdot,\cdot):B_\delta\times B_\delta\to\widetilde{T}(M\times M)$,我们有$\overline{S}(\cdot,\cdot):B_\delta\times B_\delta\to\widetilde{T}^*(M\times M)$. 命$\{u_j\}$,$\{\overline{u}_j\}$为$\hat{S}$,$\overline{\hat{S}}$的局部坐标表示,那末$\{u_j\}$为$B_\delta\times B_\delta$上的全纯函数并可表成

$$(5.3.9)\qquad u_j(z^*,\zeta^*)=\sum_{k=1}^n\gamma_{jk}(z^*,\zeta^*)(\zeta_K^*-z_K^*),$$

其中$\gamma_{jk}(z^*,\zeta^*)$关于$z^*$和$\zeta^*$是全纯的,由于$u_j(z^*,\zeta^*)$是定义在凸区域$B_\delta\times B_\delta$上的全纯函数并且$u(z^*,z^*)=0$,由除法定理立得(5.3.9)式. 再者,由于

$$\begin{aligned}u(0,\zeta^*)=\hat{S}(0,\zeta^*)=S(\eta,W_\eta^{-1}(\zeta^*))=\\=W_\eta(W_\eta^{-1}(\zeta^*))=\zeta^*\text{(在此 }S(\eta,\cdot)=W_\eta),\end{aligned}$$

我们有

$$(5.3.10)\qquad \gamma_{jk}(0,\zeta^*)=\delta_{jk}.$$

当$(z^*,\zeta^*)$是在$(0,0)$的一个足够小邻域内时(不失一般性我们可假设这个邻域就是$B_\delta\times B_\delta$,我们有

$$(5.3.11)\qquad \det(\gamma_{jk}(z^*,\zeta^*))\neq0$$

此外,由除法定理,$\gamma_{jk}$可以表成:

$$(5.3.12)\qquad \gamma_{jk}(z^*,\zeta^*)=\sum_{l=1}^n\gamma_{jkl}(z^*,\zeta^*)z_l^*+\delta_{jk},\quad (z^*,\zeta^*)\in B_\delta\times B_\delta.$$

由(5.3.9)可知核 $\Omega(\hat{\varphi}^{\nu},\hat{\overline{S}},\hat{S})(\zeta^{*})$ 可以表成

$$(5.3.13)\qquad \Omega(\hat{\varphi}^{\nu},\hat{\overline{S}},\hat{S})(\zeta^{*}) = \hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})B(z^{*},\zeta^{*}) + \hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})A(z^{*},\zeta^{*}),$$

其中外微分形式 $B$ 不包含 $d\gamma_{jk}$ 的项,而 $A$ 则包含 $d\gamma_{jk}$ 的项,所以

$$(5.3.14)\qquad |A(z^{*},\zeta^{*})| = O(|\zeta^{*}-z^{*}|^{2-2n}),$$

并且

$$(5.3.15)\qquad B(z^{*},\zeta^{*}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\frac{\det(\overline{\Gamma}_{t}\Gamma)\omega'(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*})\wedge\omega(\zeta^{*}-z^{*})}{[\sum\limits_{j,k,l}\gamma_{jk}\overline{\gamma}_{kl}(\overline{\zeta}_{l}^{*}-\overline{z}_{l}^{*})\overline{\zeta}_{j}^{*}-z_{j}^{*})]^{n}},$$

其中 $\Gamma=(\gamma_{jk}(z^{*},\zeta^{*}))$ 而 $\Gamma_{t}$ 则是 $\Gamma$ 的转置.

由于 $H$ 是一$(2n-1)$维的流形

$$(5.3.16)\qquad \int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})A(z^{*},\zeta^{*})$$

是一正常积分.

现在我们研究 $\Omega(\hat{\varphi}^{\nu},\overline{S},\hat{S})(\zeta^{*})$ 的另一项 $B(z^{*},\zeta^{*})$. 它和 $C^{n}$ 中的 Bochner—Martinelli 核十分相似;它们之间的差是

$$(5.3.17)\qquad B(z^{*},\zeta^{*}) - \Omega(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*})$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\frac{\det(\overline{\Gamma}_{t}\Gamma)\omega'(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*})\wedge\omega(\zeta^{*}-z^{*})}{[\Sigma_{j,k,l}\gamma_{jk}\overline{\gamma}_{kl}(\overline{\zeta}_{l}^{*}-\overline{z}_{l}^{*})(\overline{\zeta}_{j}^{*}-\overline{z}_{j}^{*})]^{n}}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\frac{\omega'(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*})\wedge\omega(\zeta^{*}-z^{*})}{[\Sigma_{k}(\zeta_{k}^{*}-z_{K}^{*})(\overline{\zeta}_{k}^{*}-\overline{z}_{k}^{*})]^{n}}$$

命

$$(5.3.18)\qquad v = (\zeta_{1}^{*}-z_{1}^{*},\cdots,\zeta_{n}^{*}-z_{n}^{*}).$$

则

$$(5.3.19)\qquad B(z^{*},\zeta^{*}) - \Omega(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*})$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\left(\frac{\det(\overline{\Gamma}_{t}\Gamma)}{(v\Gamma\overline{\Gamma}_{t}\overline{v}')^{n}} - \frac{1}{(v\overline{v}')^{n}}\right)\omega'(\overline{v})\wedge\omega(v)$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n}}\frac{\det(\overline{\Gamma}_{t}\Gamma)(v\overline{v}')^{n} - [v(\Gamma\overline{\Gamma}_{t})\overline{v}']^{n}}{(v\overline{v}')^{n}(v\Gamma\overline{\Gamma}_{t}\overline{v}')^{n}}$$

$\omega'(\bar{v}) \wedge \omega(v)$.

由多项式的分解方法我们有

(5.3.20) $\det(\bar{\Gamma}_t\Gamma)(v\bar{v})^n - (v\Gamma\bar{\Gamma}_t\bar{v}')^n$

$$= [\sqrt[n]{\det(\bar{\Gamma}_t\Gamma)}(v\bar{v}') - v(\Gamma\bar{\Gamma}_t)\bar{v}']p(v,\bar{v};\Gamma)$$

$$= (vQ\bar{v}')p(v,\bar{v};\Gamma),$$

其中 $P(v,\bar{v};\Gamma)$ 是 $v_j,\bar{v}_k$ 的 $2n-2$ 阶多项式,因此我们有估计

(5.3.21) $$|P(v,\bar{v};\Gamma| = O(|v|^{2n-2}).$$

而且

(5.3.22)

$$Q = (q_{jk}), q_{jk} = \sqrt[n]{\det(\bar{\Gamma}_t\Gamma)}\delta_{jk} - \sum_{l=1}^{n}\gamma_{jl}\bar{\gamma}_{kl},$$

并且由(5.3.12) 显然可知

(5.3.23) $$|q_{jk}| = O(|z^*|^2).$$

假设当 $z^*$ 趋于 $O$ 时,总有

(5.3.24) $\left|\dfrac{z^*}{\zeta^* - z^*}\right| \leqslant C$,即 $|z^*| \leqslant C|\zeta^* - z^*|$

($C$ 是一常数)

那末由(5.3.19),(5.3.21) 和(5.3.23) 可知①

(5.3.25) $$|B(z^*,\zeta^*) - \Omega(\bar{\zeta}^* - \bar{z}^*, \zeta^* - z^*)| = O(|\zeta^* - z^*|^{2-2n});$$

而且

(5.3.26) $$|\hat{\varphi}^\nu(z^*,\zeta^*) - 1| = |\hat{\varphi}^\nu(z^*,\zeta^*) - \hat{\varphi}^\nu(z^*,z^*)| = O(|\zeta^* - z^*|).$$

现在我们写

---

① 我们也能证明当 $z^*$ 沿任意路线趋于 0 时,估计式(5.3.25) 也成立(参考 §5.1)

$$(5.3.27)\quad F^{+}(z)=\int_{\zeta\in\partial D/V_{\eta\delta}\cap\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu},\overline{S},S)(\zeta)$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})A(z^{*},\zeta^{*})$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})[B(z^{*},\zeta^{*})-\Omega(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*})]$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})[\hat{\varphi}^{\nu}(z^{*},\zeta^{*})-1]\Omega(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*})+$$

$$\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\Omega(\overline{\zeta}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*}).$$

由估计式(5.3.14),(5.3.25),(5.3.26)可知右端的前四项是正常积分,而第五项是 $C^{n}$ 中的 Bochner—Martinelli 积分,由定理 5.1.2 可知

$$(5.3.28)\quad \lim_{z^{*}\to 0}\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\overline{\zeta}^{*})\Omega(\overline{\xi}^{*}-\overline{z}^{*},\zeta^{*}-z^{*})$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\zeta^{*}\in H\\|\zeta^{*}|>\varepsilon}}\hat{f}(\zeta^{*})\Omega(\overline{\zeta}^{*}-0,\zeta^{*}-0)+\frac{1}{2}\hat{f}(0).$$

当 $z\to\eta^{+}$,我们有

(5.3.29)

$$F^{+}(\eta)=\int_{\zeta\in\partial D\setminus V_{\eta\delta}\cap\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu}(\eta,\zeta),\overline{S}(\eta,\zeta),S(\eta,\zeta);\eta)$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\hat{\varphi}(0,\zeta^{*})A(0,\zeta^{*})$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})\hat{\varphi}^{\nu}(0,\zeta^{*})[B(0,\zeta^{*})-\Omega(\overline{\zeta}^{*}-0,\zeta^{*}-0)]$$

$$+\int_{\zeta^{*}\in H}\hat{f}(\zeta^{*})[\hat{\varphi}^{\nu}(0,\zeta^{*})-1]\Omega(\overline{\zeta}^{*}-0,\zeta^{*}-0)$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\zeta^{*}\in H\\|\zeta^{*}|>\varepsilon}}\hat{f}(\zeta^{*})\Omega(\overline{\zeta}^{*}-0,\zeta^{*}-0)+\frac{1}{2}\hat{f}(0).$$

如果定义

$$(5.3.30)\quad V.P.\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu}(\eta,\zeta),\overline{S}(\eta,\zeta),S(\eta,\zeta))$$

$$=\int_{\zeta\in\partial D\setminus V_{\eta\delta}\cap\partial D} f(\zeta)\Omega(\varphi^{\nu}(\eta,\zeta),\overline{S}(\eta,\zeta),S(\eta,\zeta))$$

$$+\int_{\zeta^*\in H}\hat{f}(\zeta^*)\hat{\varphi}^\nu(0,\zeta^*)A(0,\zeta^*)$$
$$+\int_{\zeta^*\in H}\hat{f}(\zeta^*)\hat{\varphi}^\nu(0,\zeta^*)[B(0,\zeta^*)-\Omega(\overline{\zeta}^*-0,\xi^*-0)]$$
$$+\int_{\zeta^*\in H}\hat{f}(\zeta^*)[\hat{\varphi}^\nu(0,\zeta^*)-1]\Omega(\overline{\zeta}^*-0,\zeta^*-0)$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\zeta^*\in H\\ |\zeta^*|>\varepsilon}}\hat{f}(\zeta^*)\Omega(\overline{\zeta}^*-0,\zeta^*-0),$$

那末，由于

$$(5.3.31)\qquad \hat{f}(0)=f(\eta),$$

我们就得到 Plemelj 公式(5.3.2). 同理，我们可以证明(5.3.3).

由 $C^n$ 中的结果(见定理 5.1.3)，可知极限函数 $F^\pm(z)$ 属于 $H(\alpha,\partial D)$，也就是 $F^\pm(z)$ 可以连续拓展到 $\partial D$. 同样我们可以证明结论的其余部分. □

### 5.3.2 Hartogs—Bochner 定理

象 $C^n$ 中一样我们也可研究给定在 Stein 流形 $M$ 的一相对紧区域 $D$ 的边界 $\partial D$ 上的函数全纯开拓到 $D$ 的问题，并可得到可以开拓的三个等价条件，我们有下列定理(钟同德[1987C]，C. Laurent—Thiebaut[1982]，林亚先[1985])：

**定理 5.3.2**(Aronov 和 Kytmanov) 假设 $D$ 的边界 $\partial D$ 是一 $C^{(2)}$ 类的光滑可定向流形，并且 $f\in C^{(1)}(\partial D)$，当且仅当

$$(5.3.32)\qquad \int_{\partial D}f(\zeta)\Omega(\varphi^\nu,\overline{S},S)=0,z\in M\backslash\overline{D}$$ 时，存在一在 $D$ 上的全纯函数 $F\in C^{(1)}(\overline{D})$，使得 $F|_{\partial D}=f$. 如果 $M\backslash\overline{D}$ 是连结的，那末(5.3.32) 只要对 $z\in M\backslash\widetilde{D}, D\subset\subset\widetilde{D}\subset\subset M$ 成立.

如果条件(5.3.32) 满足，那末拓展函数 $F$ 可以明确地表为

$$(5.3.33)\qquad F(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\Omega(\varphi^\nu,\overline{S},S),z\in D^+.$$

**定理 5.3.3**(Bochner) 假设区域 $D$ 的边界 $\partial D$ 是 $C^{(2)}$ 类的，$M\backslash\overline{D}$

是连结的，又 $f \in C^{(1)}(\partial D)$. 当且仅当

$$\bar{\partial}_b f = 0 \tag{5.3.34}$$

时，存在一函数 $F \in A(D) \wedge C^{(1)}(\bar{D})$ 使得 $F|_{\partial D} = f$.

**定理 5.3.4** (Hartogs ,Osgood 和 Braun) 假设 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 的一相对紧区域使得 $M\backslash\bar{D}$ 是连结的. 每一在 $\partial D$(即某一邻域 $U(\partial D)$) 全纯的函数 $f(z)$ 都可全纯开拓到整个 $D$.

### 5.33 Stein 流形上 $\bar{\partial}_b$ 一闭形式的开拓

命 $M$ 为一 Stein 流形，$D$ 为 $M$ 中的一相对紧区域，$\partial D$ 是连结的，$C^{(1)}$ 的或者是逐块 $C^{(1)}$ 的. 下面我们按照 J. J. Kohn 和 H. Rossi[1965] 的方法构造边界上同调和 $\bar{\partial}_b$ 一复形.

我们用 $\mathscr{A}^{p,q}$ 表示 $D$ 上 $(p,q)$ 型 $C^\infty$ 形式的空间，$\dot{\mathscr{A}}^{p,q}$ 表示在 $D$ 上一直到 $\partial D$ 上都是 $C^\infty$ 的 $(p,q)$ 型形式的空间，即由 $M$ 上的 $(p,q)$ 形式的限制所构成的. 用 $\tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 表示 $\partial D$ 上的 $(p,q)$ 形式. 用 $\Lambda$ 表示限制映射 $\Lambda: \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \to \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$.

**定义 5.3.1** 形式 $\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 称为**复法的**(Complex normal)，如果存在 $\psi \in \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 使得 $\varphi = \psi \wedge \Lambda(\bar{\partial}\rho)$，其中 $\rho$ 是 $\partial D$ 的定义函数. 用 $\tilde{\mathscr{C}}^{p,q}$ 表示 $\tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 由复法形式构成的子空间.

**定义 5.3.2** 形式 $\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 称为**复切的**(Complex tangential)，如果对每一 $\psi \in \tilde{\mathscr{C}}^{p,q}$ 和每一 $p \in \partial D$，有 $<\varphi,\psi>_p = 0$，用 $\tilde{\mathscr{D}}^{p,q}$ 表示 $\tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 由复切形式构成的子空间，因此我们有下列直接分解

$$\tilde{\mathscr{A}}^{p,q} = \tilde{\mathscr{C}}^{p,q} \oplus \tilde{\mathscr{D}}^{p,q}. \tag{5.3.35}$$

命 $\tilde{\nu}: \tilde{\mathscr{A}}^{p,q} \to \tilde{\mathscr{C}}^{p,q}$ 和 $\tilde{\mu}: \tilde{\mathscr{A}}^{p,q} \to \tilde{\mathscr{D}}^{p,q}$ 为相应的投影. 我们用 $\nu = \tilde{\nu}\cdot\Lambda$ 和 $\mu = \tilde{\mu}\cdot\Lambda$ 定义映射 $\nu: \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \to \tilde{C}^{p,q}$ 和 $\mu: \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \to \tilde{\mathscr{D}}^{p,q}$. 现在我们定义空间 $\dot{\mathscr{C}}^{p,q}$ 和 $\dot{\mathscr{D}}^{p,q}$ 为：

$$\dot{\mathscr{C}}^{p,q} = \{\varphi \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \mid \Lambda\varphi \in \tilde{\mathscr{C}}^{p,q}\} \tag{5.3.36}$$

$$= \{\varphi \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \mid \mu\varphi = 0\}$$

和

(5.3.37)
$$\dot{\mathscr{D}}^{p,q} = \{\varphi \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \mid \Lambda\varphi \in \widetilde{\mathscr{D}}^{p,q}\}$$
$$= \{\varphi \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q} \mid \nu\varphi = 0\}.$$

**定义 5.3.3** 映射 $\bar{\partial}_b: \widetilde{\mathscr{A}}^{p,q} \to \widetilde{\mathscr{A}}^{p,q+1}$ 定义为 $\bar{\partial}_b\varphi = \mu\bar{\partial}\varphi'$，其中 $\varphi' \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q}$ 和 $\varphi = \Lambda\varphi'$. 称 $\varphi$ **是 $\bar{\partial}_b$ 一闭的**，如果 $\bar{\partial}_b = 0$.

命 $\underline{\mathscr{A}}^{p,q}$ 为 $M$ 上的 $C^\infty(p,q)$ 形式的芽层，又 $\underline{\mathscr{C}}^{p,q}$ 为 $M$ 上限制在 $\partial D$ 上的复法的 $C^\infty(p,q)$ 形式的芽层(即 $\varphi \in \underline{\mathscr{C}}^{p,q}$ 如果 $\varphi = \psi \wedge \bar{\partial}\rho + \rho\theta$，见定义 5.3.1)(关于层的一般概念见第六章).

**定义 5.3.4** 层 $\mathscr{B}^{p,q}$ 定义为商空间 $\underline{\mathscr{A}}^{p,q}/\underline{\mathscr{C}}^{p,q}$，即由正合序列

(5.3.38) $0 \to \underline{\mathscr{C}}^{p,q} \to \underline{\mathscr{A}}^{p,q} \to \underline{\mathscr{B}}^{p,q} \to 0$

定义

**注意** $\bar{\partial}: \underline{\mathscr{C}}^{p,q} \to \underline{\mathscr{C}}^{p+q+1}$，由于 $\bar{\partial}(\psi \wedge \bar{\partial}\rho + \rho\theta) = (\bar{\partial}\psi - \theta) \wedge \bar{\partial}\rho + \rho\bar{\partial}\theta$. 因此 $\bar{\partial}$ 诱导一映 $\underline{\mathscr{B}}^{p,q}$ 入 $\underline{\mathscr{B}}^{p,q+1}$ 的映射.

**定义 5.3.5** 映射 $\bar{\partial}_b: \underline{\mathscr{B}}^{p,q} \to \underline{\mathscr{B}}^{p,q+1}$ 由下列交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \underline{\mathscr{C}}^{p,q} \to & \underline{\mathscr{A}}^{p,q} \to & \underline{\mathscr{B}}^{p,q} \to 0 \\ & \downarrow\bar{\partial} & \downarrow\bar{\partial} & \downarrow\bar{\partial}_b \\ 0 \to & \underline{\mathscr{C}}^{p,q+1} \to & \underline{\mathscr{A}}^{p,q+1} \to & \underline{\mathscr{B}}^{p,q+1} \to 0 \end{array}$$

定义.

现在命 $\dot{\mathscr{C}}^{p,q}, \dot{\mathscr{A}}^{p,q}, \dot{\mathscr{B}}^{p,q}$ 分别为层 $\underline{\mathscr{C}}^{p,q}, \underline{\mathscr{A}}^{p,q}, \underline{\mathscr{B}}^{p,q}$ 在 $\bar{D}$ 上的截面空间，由于这些层是强层(fine sheaves)，(5.3.38) 诱导一截面的正合序列，而(5.3.39) 诱导一正合的上同调序列：

(5.3.40) $\cdots \to H^{p,q}(\mathscr{C}) \to H^{p,q}(\mathscr{A}) \to H^{p,q}(\mathscr{B}) \to H^{p,q+1}(\mathscr{C}) \to \cdots$

其中

$$H^{p,q}(\mathscr{C}) = \frac{\{\varphi \in \dot{\mathscr{C}}^{p,q}; \bar{\partial}\varphi = 0\}}{\bar{\partial}\dot{\mathscr{C}}^{p,q-1}},$$

$$H^{p,q}(\mathscr{A}) = \frac{\{\varphi \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q}; \bar{\partial}\varphi = 0\}}{\bar{\partial}\dot{\mathscr{A}}^{p,q-1}},$$

$$H^{p,q}(\mathscr{B}) = \frac{\{\varphi \in \dot{\mathscr{B}}^{p,q}; \bar{\partial}_b\varphi = 0\}}{\bar{\partial}\dot{\mathscr{B}}^{p,q-1}},$$

使用一适当的度量可以在 $\partial D$ 上分解序列(5.3.38) 并且找到 $\mathscr{B}^{p,q}$ 的一个代表($\tilde{\mathscr{D}}^{p,q}$). $\mathscr{B}$ 的 $\bar{\partial}_b$ 一上同调群和 $\tilde{\mathscr{D}}$ 的相同.

**定理 5.3.5** 如果 $D$ 是 Stein 流形 $M$ 上的一个相对紧强拟凸域,$\partial D$ 是光滑连结的,那末

$H^{p,q}(\mathscr{C}) \cong H^{p,q}(\mathscr{A}) \cong 0, p,q = 0,\cdots,n.$

**证明** 利用Stein流形上关于$(p,q)$型微分形式的不变微分核(4.15.3),按照 R. Harvey 和 J. Polking[1979] 的方法,利用陈度量和陈联络,可以证明 Stein 流形上强拟凸域 $D$ 的 $\bar{\partial}_b$ 一方程是可解的(邱春晖[1988]),即 $H^{p,q}(\mathscr{B}) = 0$,那末由(5.3.40) 立得定理的结论. □

J. J. Kohn 和 A. V,Rossi[1965] 对 $\bar{\partial}_b$ 一闭形式的开拓提出下列问题:

**问题**:给定 $\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 要找一 $\varphi_o \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q}$ 使得 $\bar{\partial}\varphi_o = 0$ 和 $\mu(\varphi_o) = \tilde{\mu}(\varphi)$. 如果这样的 $\varphi_o$ 存在,则称 $\varphi_o$ 为 $\varphi$ 的一个 $\bar{\partial}$ — **闭拓展**.

显然,如果这个问题可解,则必需 $\bar{\partial}_b\varphi = 0$. 因为如果这样的 $\varphi_o$ 存在,那未我们有 $\bar{\partial}\varphi_o = 0$,因此 $\tilde{\mu} \wedge (\bar{\partial}\varphi_o) = \widetilde{\mu\, \bar{\partial}_b\varphi} = \bar{\partial}_b\varphi = 0$.

我们有下述定理(钟同德[1988])

**定理 5.3.6** 如果 $D \subset\subset M$ 是 *Stein* 流形上的强拟凸域,$\partial D$ 是光滑连结的,那未每一 $\bar{\partial}_b$ 一闭形式 $\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{p,q}$ 都有一 $\bar{\partial}$ 一闭开拓.

**证明** 由于Stein 流形上强拟凸域 $D$ 的 $\bar{\partial}_b$ 一方程是可解的(邱春晖[1988]),即 $H^{p,q}(\mathscr{B}) = 0$,那末对每一满一足 $\bar{\partial}_b\varphi = 0$ 的 $\varphi \in \tilde{\mathscr{D}}^{p,q}$,存在一 $\psi \in \tilde{\mathscr{D}}^{p,q-1}$ 使得 $\bar{\partial}_b\psi = \varphi$. 再取一 $f \in \dot{\mathscr{A}}^{p,q-1}$ 满足 $\mu f =$

$\tilde{\mu}\,\Lambda f = \psi$,那末 $\bar{\partial} f$ 恰好就是 $\varphi$ 的一个 $\bar{\partial}$ 一闭开拓. 因为

$$\mu\bar{\partial} f = \tilde{\mu}\wedge\bar{\partial} f = \widetilde{\mu\ \bar{\partial}_b\psi} = \tilde{\mu}\,\varphi.$$

而且,$\bar{\partial} f$ 不仅是 $\varphi$ 的一个 $\bar{\partial}$ 一闭开拓还是 $\varphi$ 的一个 $\bar{\partial}$ 一恰当开拓.

## § 5.4 正交系与 Bergman 核函数

第四章我们介绍了全纯函数的具体积分表示,现在我们利用抽象的 Hilbert 空间方法来得到全纯函数的新的形式的积分表示. 这样的方法已于本世纪二十年代由 S. Bergman[1922][1947][1948] 引进复分析. Bergman 发展这个理论的目的是要研究 $C^n$ 空间中在双全纯等价意义下域的分类问题,我们在第一章曾多次说过,当 $n>1$ 时这个问题特别重要,因为单复变数的 Riemann 映射基本定理在多复变数空间中不再成立(参阅第 1.4.4 段). 抽象的"Bergman 核函数"对 $C^n$ 中的任意有界域很容易定义,但是除了象超球和多圆柱和四类典型域等几个特殊情形外很难求出它们的具体表达式,也很难研究它们在边界的性质;因此在一个很长时间内 Bergman 核函数的应用受到了限制,然而在近十年来得到较大进展,特别是在强拟凸域的情况,现在 Bergman 核函数已经广泛地用来研究双全纯映射的边界正则性. 在本节我们先介绍核函数的一些初等结果,关于它在强拟凸域和双全纯映射上的应用的深刻性质将在下一节介绍.

### 5.4.1 绝对值平方可积的全纯函数

命 $L^2H(D)$ 表示所有在一有界域 $D$ 全纯,并绝对值平方可积的函数 $f(z)$ 的全体,即

$$\int_D |f(z)|^2 dv_z < \infty,$$

其中 $dv$ 表示欧氏体积元素,即 $dv_z = dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n$, $z_\alpha = x_\alpha +$

$iy_\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$，$x_\alpha$ 与 $y_\alpha$ 为实变数.

函数 $f(z),g(z)\in L^2H(D)$ 称为**正交的**，如果

$$\int_D f(z)\overline{g(z)}dv_z=0.$$

函数序列 $\{\varphi_k(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 称为 $L^2H(D)$ 的**正交正规函数系**，如果每一 $\varphi_k(z)\in L^2H(D)$，且

(5.4.1) $$\int_D \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}dv_z=\delta_{kl}$$

其中

$$\delta_{kl}=\begin{cases}0,\text{如 } k\neq l,\\1,\text{如 } k=l.\end{cases}$$

**定理 5.4.1**(Bessel 不等式)　设 $\{\varphi_k(z)\}$ 为 $L^2H(D)$ 的一正交正规函数系，$f(z)\in L^2H(D)$，$a_k=\int_D f(z)\varphi_k(z)dv_z(k=1,2,\cdots)$. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant\int_D|f(z)|^2dv_z.$$

**证明**　因为

$$0\leqslant\int_D\left|f(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\right|^2dv_z=\int_D|f(z)|^2dv_z-\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2$$

故

$$\sum_{k=1}^{N}|a_k|^2\leqslant\int_D|f(z)|^2dv_z$$

命 $N\to\infty$，即得定理. □

**定理 5.4.2**　若 $f(z)$ 在闭多圆柱

$$\overline{p}(a,r):=\{|z_1-a_1|\leqslant r_1,\cdots,|z_n-a_n|\leqslant r_n\}$$

全纯，则

$$\int_{p(a,r)}|f(z)|^2dv_z=|f(a)|^2\int_{p(a,r)}dv_z+\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}\right|^2_{z=a}\int_{p(a,r)}|z_\alpha-a_\alpha|^2dv_z$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\right|^2_{z=a}\int_{p(a,r)}|(z_\alpha-a_\alpha)(z_\beta-a_\beta)|^2dv_z+$$

$$+\cdots.$$

**证明**　由于 $f(z)$ 在 $\overline{p}(a,r)$ 可展为幂级数 $f(z) = f(a) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha})_{z=a}(z_\alpha - a_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}(\frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha \partial z_\beta})_{z=a}$

$$(z_\alpha - a_\alpha)(z_\beta - a_\beta) + \cdots$$

并且在 $\overline{p}(a,r)$ 一致收敛.

命 $z_k - a_k = \rho_k e^{i\theta_k}, k_1, \cdots k_n, m_1, \cdots, m_n$ 为非负整数,则易见

$$\int_{p(a,r)}(z_1 - a_1)^{k_1}\cdots(z_n - a_n)^{k_n}(\overline{z}_1 - \overline{a}_1)^{m_1}\cdots(\overline{z}_n - \overline{a}_n)^{m_n}dv_z$$

$$= \int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\rho_1^{k_1+m_1+1}\cdots\rho_n^{k_n+m_n+1}d\rho_1\cdots d\rho_n\int_0^{2\pi}e^{i(k_1-m_1)\theta_1}d\theta_1$$

$$\cdots\int_0^{2\pi}e^{i(k_n-m_n)\theta_n}d\theta_n = 0, \text{如有一 } k_\alpha \neq m_\alpha;$$

把 $\int_D |f(z)|^2 dv_z$ 化为逐项积分即得定理.□

由此定理可知

**定理 5.4.3**　如 $f(z) \in L^2H(D)$, $\overline{p}(a,r)$ 为 $D$ 内的任一多圆柱,则

$$|f(a)|^2 \leqslant \frac{\int_{p(a,r)}|f(z)|^2 dv_z}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2} \leqslant \frac{\int_D |f(z)|^2 dv_z}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2}.$$

**定理 5.4.4**　若 $\{\varphi_k(z)\}$ 为 $L^2H(D)$ 的一正交正规函数系,则

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(z)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}$$

是 $z,\zeta \in D$ 的 $z$ 与 $\overline{\zeta}$ 的全纯函数.

**证明**　对任一点 $z \in D$,作多圆柱 $\overline{p}(z,r) \subset D$. 由定理 5.4.3 知

$$\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2 = \int_D \Big|\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}\Big|^2 dv_\zeta \geqslant \pi^n r_1^2\cdots r_n^2(\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2)^2.$$

由此可知

(5.4.2)　$$\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^n r_1^n\cdots r_n^n}, N = 1,2\cdots,$$

这表示级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2$$

在点 $z \in D$ 收敛.

对任一闭域 $\overline{B} \subset D$,命 $R(\overline{B})$ 表示数值

$$\inf_{z\in \overline{B}} |\zeta_\alpha - z_\alpha|, \alpha = 1,2,\cdots,n$$

当 $\zeta \in \partial D$ 时的最小一个,则对 $\overline{B}$ 的任一点 $z$,闭多圆柱 $|\zeta_\alpha - z_\alpha| \leqslant R(\overline{B})(\alpha = 1,\cdots,n)$ 包含在 $D$ 中,由(5.4.2)知,对任一点 $z \in \overline{B}$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^n[R(\overline{B})]^{2n}}.$$

应用 Schwaz 不等式知,若 $z \in \overline{B},\zeta \in \overline{B}$,则

$$\begin{aligned} |\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}|^2 &\leqslant (\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)\varphi_k\overline{(\zeta)})|^2 \\ &\leqslant (\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)|^2)(\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(\zeta)|^2) \\ &\leqslant \frac{1}{\pi^{2n}[R(\overline{B})]^{4n}}. \end{aligned}$$

这表示函数序列$\{\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\}_{N=1,2,\cdots}$ 在任一闭域 $\overline{B} \subset D$ 一致有界,故必局部一致有界,并且$\{\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\}_{N=1,2,\cdots}$ 在每一点 $z \in D,\zeta \in D$ 都(绝对)收敛,因此在任一闭域 $\overline{B} \subset D$ 一致收敛,又由于 $\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}$ 为 $z \in D,\zeta \in D$ 的全纯函数序列,故由 Weierstrass 定理知极限函数 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(z)}$ 也是 $z \in D,\zeta \in D$ 的全纯函数. □

**定理 5.4.5** 若$\{\varphi_k(z)\}$是 $L^2H(d)$ 的一正交正规函数系,又 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 < \infty$,则

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z)$$

是在 $D$ 全纯的函数,因此是 $L^2H(D)$ 中的函数,因为 $\int_D |g(z)|^2 dv_z = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 < \infty$.

**证明** 使用上定理的证明方法可知,对任一闭域 $\overline{B} \subset D$ 有

$$|\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(z)|^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{N} |a_k\varphi_k(z)|)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n[R(\overline{B})]^{2n}} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2,$$

由此可见 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z)$ 在 $\overline{B}$ 一致收敛，故 $g(z)$ 在 $D$ 全纯. □

**定理 5.4.6** 设 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$，若命 $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z)$，$\{\varphi_k(z)\}$ 是 $L^2(D)$ 的正交正规系，那末

$$\lim_{N\to\infty}\int_D |g(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z = 0,$$

并且

$$a_k = \int_D g(z)\overline{\varphi_k(z)}dv_z.$$

**证明** 由定理 5.4.5，$g(z)$ 在 $D$ 内任一紧致集一致收敛，故

$$\int_{\overline{B}} |g(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z = \int_{\overline{B}} \lim_{m\to\infty} |\sum_{k=N+1}^{N+m} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int_{\overline{B}} |\sum_{k=N+1}^{N+m} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2,$$

这表示对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可取 $N$ 充份大使得

$$\int_{\overline{B}} |g(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z < \varepsilon.$$

上式对任一包含于 $D$ 内的闭域 $\overline{B}$ 都成立，故有

$$\int_D |g(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(z)|^2 dv_z \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了定理的第一部分.

由于对任一 $a_k$ 可取 $N$ 适当大使得

$$|\int_D g\overline{\varphi}_k dv_z - a_k| = |\int_D g\overline{\varphi}_k dv_z - \int_D (\sum_{l=1}^{N} a_l\varphi_l)\overline{\varphi}_k dv_z|$$

$$\leqslant |\int_D (g - \sum_{l=1}^{N} a_l\varphi_l)\overline{\varphi}_k dv_z| \leqslant (\int_D |g(z) - \sum_{l=1}^{N} a_l\varphi_l(z)|^2 dv_z)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\int_D |\varphi_k(z)|^2 dv_z)^{\frac{1}{2}},$$

由定理的第一部份知上式可以任意小，所以

$$a_k = \int_D g\overline{\varphi}_k dv_z. \square$$

**定义 5.4.1** $L^2H(D)$ 的一正交正规函数 $\{\varphi_k(z)\}$ 称为**完整的**，如对任一函数 $f(z) \in L^2H(D)$，下列条件之一成立：

Ⅰ） 有表示式

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z)$$

其中 $a_k = \int_D f(z)\overline{\varphi_k(z)}dv_z$；

Ⅱ） 若 $\int_D f\overline{\varphi}_k dv_z = 0, k = 1,2,\cdots$，则必须 $f \equiv 0$；

Ⅲ） 若命 $a_k = \int_D f\overline{\varphi}_k dv_z$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_D |f|^2 dv_z.$$

下面证明这三个条件是等价的.

由定理 5.4.6 知条件 Ⅰ）包含 Ⅲ），Ⅲ）显然包含 Ⅱ）. 剩下只要证明 Ⅱ）包含 Ⅰ）.

任取一 $f \in L^2H(D)$，设 $\{\varphi_k\}$ 为 Ⅱ）定义下的完整正交正规函数系. 命

$$a_k = \int_D f\overline{\varphi}_k dv_z \text{ 及 } g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z).$$

由定理 5.4.1 及 5.4.5 知 $g(z)$ 在 $D$ 全纯，由定理 5.4.6 知必须

$$a_k = \int_D g\overline{\varphi}_k dv_z$$

由此知

$$\int_D (f-g)\overline{\varphi}_k dv_z = 0, k = 1,2,\cdots,$$

而由 Ⅱ）知

$$f \equiv g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z).$$

故条件 Ⅰ），Ⅱ），Ⅲ）是等价的

### 5.4.2 $L^2H(D)$ 的完整正交正规函数系的存在

**定理 5.4.7** 若 $D$ 是 $C^n$ 的一有界域，则存在一 $L^2H(D)$ 的完整正交正规函数系.

**证明** 不妨假设 $D$ 包含原点，为简便起见，命

$$(5.4.3)\qquad \partial_1^{p_1}\partial_2^{p_2}\cdots\ \partial_n^{p_n}=\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}{\partial z_1^{p_1}\partial z_2^{p_2}\cdots\partial z_n^{p_n}}$$

及

$$(5.4.3)\qquad \partial_1^{p_1}\partial_2^{p_2}\cdots\ \partial_n^{p_n}f^0=\left(\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}f(z)}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}}\right)_{z=0},$$

$$\partial_k^0 f^0=f(0).$$

把指标组 $(p_1,\cdots,p_n)$ 排一次序如下：如 $m_1+m_2+\cdots+m_n<p_1+p_2+\cdots+p_n$，则命 $(m_1,\cdots,m_n)$ 在 $(p_1,\cdots,p_n)$ 之前，如 $m_1+\cdots+m_n=p_1+\cdots+p_n,m_1=p_1,\cdots,m_{k-1}=P_{k-1}(k<n)$ 而 $m_k<p_k$，亦命 $(m_1,\cdots,m_n)$ 在 $(p_1,\cdots,p_n)$ 之前，此外我们用符号 $(m_1,\cdots,m_n)\subset(p_1,\cdots,p_n)$ 表示指标组 $(m_1,\cdots,m_n)$ 在 $(p_1,\cdots,p_n)$ 之前；$(m_1,\cdots m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n)$ 表示指标组 $(m_1,\cdots,m_n)$ 在 $(p_1,\cdots,p_n)$ 之前或者两者相等.

Ⅰ） 以 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 表示 $L^2H(D)$ 的函数集合：任一 $f(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$ 满足下面的条件

$$(5.4.5)\qquad \partial_1^{m_1}\cdots\ \partial_n^{m_n}f^0=，若 (m_1,\cdots,m_n)\subset(p_1,\cdots,p_n)$$

$$\partial_1^{p_1}\cdots\ \partial_n^{p_n}f^0=1.$$

显然 $\dfrac{z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}}{p_1!\cdots p_n!}\in E^{p_1,\cdots,p_n}$，故 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 是非空的集合

现在我们找一极小函数 $h(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$ 使 $\int_D|h(z)|^2dv_z$ 为最小，此值记为 $A$，即

$$A=\inf_{f\in E^{p_1,\cdots,p_n}}\int_D|f(z)|^2dv_z.$$

取一函数序列 $h_l(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}(l=1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{l\to\infty}\int_D|h_l(z)|^2dv_z=A.$$

由定理 5.4.3 知，对任一闭域 $\overline{B} \subset D$，当 $z \in \overline{B}$ 恒有

$$|h_l(z)|^2 \leqslant \frac{\int_D |h_l(z)|^2 dv_z}{\pi^n [R(\overline{B})]^{2n}},$$

而不等式右端当 $l \to \infty$ 时，趋于 $\frac{A}{\pi^n [R(\overline{B})]^{2n}}$，所以函数序列 $\{h_l(z)\}$ 在 $\overline{B}$ 一致有界，故成一正规族. 我们可以在其中取一子列 $h_{l_j}(z)$ 使它在 $D$ 一致收敛为一全纯函数 $h(z)$. 显然 $h(z) \in E^{p_1, \cdots, p_n}$，因为每一 $h_{l_j}(z) \in E^{p_1, \cdots, p_n}$. 故对 $D$ 内任一闭域 $\overline{B}$ 有

$$\int_{\overline{B}} |h(z)|^2 dv_z = \lim_{j \to \infty} \int_{\overline{B}} |h_{l_j}(z)|^2 dv_z \leqslant \lim_{j \to \infty} \int_D |h_{l_j}(z)|^2 dv_z = A.$$

由于 $\overline{B}$ 是任意的，故有

$$\int_D |h(z)|^2 dv_z \leqslant A.$$

另一方面，因为 $h(z) \in E^{p_1, \cdots, p_n}$，故

$$\int_D |h(z)|^2 dv_z \geqslant A.$$

所以 $\int_D |h(z)|^2 dv_z = A$，而 $h(z)$ 为 $E^{p_1, \cdots, p_n}$ 的极小函数.

Ⅱ) 对 $L^2H(D)$ 中的任一函数 $g(z)$，如果当 $(m_1, \cdots, m_n) \subseteq (p_1, \cdots p_n)$ 时满足 $\partial_1^{m_1} \cdots \partial_n^{m_n} g^0 = 0$，那末

(5.4.6) $$\int_D h(z) \overline{g(z)} dv_z = 0$$

因为对任一常数 $C$，$h(z) + cg(z) \in E^{p_1, \cdots, p_n}$.

特别取

$$C = -\frac{\int_D h\overline{g} dv_z}{\int_D |g|^2 dv_z},$$

则

$$\int_D |f + cg|^2 dv_z = \int_D |h|^2 dv_z + \overline{C} \int_D h\overline{g} dv_z + c \int_D \overline{h} g dv_z$$

$$+\ |c|^2\int_D |g|^2 dv_z = A - \frac{\left|\int_D h\bar{g}dv_z\right|}{\int_D |g|^2 dv_z} \leqslant A,$$

这是不可能的，除非

$$\int_D h\bar{g}dv_v = 0.$$

Ⅲ） 极小函数是唯一的. 若 $E^{p_1,\cdots\cdots,p_n}$ 有另一极小函数 $h_1(z)$，则 $g(z) = h(z) - h_1(z)$ 满足 Ⅱ） 的条件，因而

$$\int_D h(\bar{h} - \bar{h}_1)dv_z = \int_D h_1(\bar{h} - \bar{h}_1)dv_z = 0,$$

即

$$\int_D |h - h_1|^2 dv_z = 0.$$

故 $h \equiv h_1$

Ⅳ） 现在为清楚起见，以 $h_{p_1,\cdots,p_n}(z)$ 表示 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 的极小函数，其中 $p_1,\cdots,p_n = 0,1,2,\cdots$. 由 Ⅱ）知 $\{h_{p_1,\cdots,h_n}\}$ 成一正交系，即

$$\int_D h_{p_1,\cdots,p_n}(z)\,\overline{h_{q_1,\cdots,q_n}(z)}dv_z = 0, \text{如有一 } p_k \neq q_k.$$

若命

$$\varphi_{p_1,\cdots p_n}(z) = \frac{h_{p_1,\cdots,p_n}(z)}{\left(\int_D |h_{p_1,\cdots,p_n}(z)|^2 dv_z\right)^{\frac{1}{2}}},$$

则 $\{\varphi_{p_1,\cdots,p_n}(z)\}$ 是 $L^2H(D)$ 的正交正规函数系，现在证明它是完整的.

设 $f(z)$ 为 $L^2H(D)$ 的任一函数，作函数

$$f_{p_1,\cdots,p_n}(z) = \sum_{(m_1,\cdots,m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n)} a_{m_1\cdots m_n}\varphi_{m_1\cdots m_n}(z),$$

选择 $a_{m_1\cdots m_n}$ 使得 $f_{p_1\cdots p_n}(z)$ 满足条件：

(5.4.7) $$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0_{p_1\cdots p_m} = \partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0,$$
$$\text{当}(m_1,\cdots,m_n) \subseteq (p_1,\cdots p_n).$$

这是可能的，因为由(5.4.7)所得的方程组中，$a_{m_1\cdots m_n}$ 的系数所成的函数行列式不为零.

由 Ⅱ) 知

$$\int_D (f_{p_1\cdots p_n} - f)\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n} dv_z = 0, \text{当} (m_1, \cdots, m_n) \subseteq (p_1, \cdots, p_n),$$

此即

$$\int_D (\Sigma a_{q_1\cdots q_n}\varphi_{q_1\cdots q_n} - f)\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n} dv_z = a_{m_1\cdots m_n} - \int_D f\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n} dv_z = 0$$

或

(5.4.8)

$$a_{m_1\cdots m_n} = \int_D f\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n} dv_z.$$

若命

$$g(z) = \sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_n}\varphi_{p_1\cdots p_n}(z),$$

则由定理 5.4.1 知

$$\sum_{p_1,\cdots,p_n}^{\infty} |a_{p_1\cdots p_n}|^2 \leqslant \int_D |f|^2 dv_z,$$

由定理 5.4.5 知 $g(z)$ 在 $D$ 是全纯的，并且

$$g(z) = \lim_{\substack{p_1\to\infty \\ \cdots\cdots \\ p_n\to\infty}} f_{p_1\cdots p_n}(z).$$

根据条件(5.4.7)可知，当 $(m_1, \cdots, m_n) \subseteq (p_1, \cdots, p_n)$ 时，

$$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n} g^0 = \partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n} f^0_{p_1\cdots p_n} = \partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n} f^0,$$

此即

$$\left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} g(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right)_{z=0},$$

$$m_1, \cdots, m_n = 0, 1, \cdots$$

由 *Taylor* 展开式的唯一性可知

$$f(z) \equiv g(z) = \sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_n}\varphi_{p_1\cdots p_n}(z)$$

由(5.4.8),其中

$$a_{p_1\cdots p_n}=\int_D f\overline{\varphi}_{p_1\cdots p_n}dv_z.$$

因此由完整系的定义 I )知道$\{\varphi_{p_1\cdots p_n}(z)\}$是$L^2H(D)$的完整正交正规函数系,定理完全证明.□

**注意** 1. 定理的证明开始时,我们曾把指标组排列成一个次序,当然我们就可以按这次序以一个指标来表示完整正交正规函数系,即$\{\varphi_k\}_{k=1,2,\cdots}$.

2. 值得注意的是,从证明过程中可以看出:我们可以在原点附近选取一完整正交正规系,使得在原点附近的展开式为

$\varphi_0(z)=a_0^{(0)}+a_1^{(0)}z_1+\cdots+a_n^{(0)}z_n+a_{11}^{(0)}z_1^2+a_{12}^{(0)}z_1z_2+\cdots,a_0^{(0)}\neq 0$;

$\varphi_1(z)=a^{(1)}z_1+\cdots+a_n^{(1)}z_n+a_{11}^{(1)}z_1^2+z_{12}^{(1)}z_1z_2+\cdots,a_1^{(1)}\neq 0$;

……

$\varphi_n(z)=a_n^nz_n+a_{11}^{(n)}z_1^2+a_{12}^{(n)}z_1z_2+\cdots,a_n^{(n)}\neq 0$;

$\varphi_{n+1}(z)=a_{11}^{(n+1)}z_1^2+a_{12}^{(n+1)}z_1z_2+\cdots,a_{11}^{(n+1)}\neq 0$;

$\varphi_{n+2}(z)=+a_{12}^{(n+2)}z_1z_2+\cdots,a_{12}^{(n+2)}\neq 0$;

……

### 5.4.3 Bergman 核函数

设$\{\varphi_k(z)\}$为有界域$D$的$L^2H(D)$的一完整正交正规系,以后简称为$D$域的完整系,命

(5.4.9) $K(z,\overline{\zeta})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_{(}\zeta)},z\in D,\zeta\in D$称为$D$域的**核函数**,由定理5.4.4知道,它是$z$和$\overline{\zeta}$的全纯函数.

核函数有下列性质:

**定理 5.4.8** 如$t\in D$,则$K(t,\overline{t})>0$.

证明. 定理是说$\{\varphi_k(t)\}$在$D$内没有公共零点,这是显然的,因为任一函数$f(z)\in L^2H(D)$都能展为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z).$$

如 $\varphi_k(z)(k=0,1,\cdots)$ 以 $t$ 点为公共零点,则必 $f(t)=0$,这是不可能的,因为 $f(t)+c$ 仍然属于 $L^2H(D)$,其中 $C$ 为任意常数. □

**定理 5.4.9** 若 $f(z)\in L^2H(D)$,则对任一点 $t\in D$ 有

$$f(t)=\int_D f(z)K(t,\bar{z})dv_z \tag{5.4.10}$$

及

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(t)}{\partial t_1^{m_1}\cdots\partial t_n^{m_n}}=\int_D f(z)\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}K(t,\bar{z})}{\partial t_1^{m_1}\cdots\partial t_n^{m_n}}dv_z.$$

公式(5.4.11)称为**核函数的再生性质**.它是 $D$ 上全纯函数的另一种积分表示,和第四章所说的积分表示不同,那里的积分一般是展布在区域的边界或部分边界上,而这里的积分却是展布在整个区域上.

**证明** 将 $f(z)\in L^2H(D)$ 展为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z),a_k=\int_D f\bar{\varphi}_k dv_z,$$

我们有

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_D f(z)K(t,\bar{z})dv_z-\sum_{k=0}^{N}a_k\varphi_k(t)\right|$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left|\int_D f(z)[K(t,z)-\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(z)}]dv_z\right|$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\left(\int_D|K(t,\bar{z})-\sum_{k=0}^{N}\varphi(t)\overline{\varphi_k(z)}|^2dv_z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_D|f(z)|^2dv_z\right)^{\frac{1}{2}},$$

而上式右端第一个因子,根据定理 5.4.6 趋于零,因此(5.4.10)式成立,同理可证(5.4.11)也成立. □

**定理 5.4.10** 设 $t$ 为 $D$ 中一固定点,则 $\dfrac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}$ 为 $L^2H(D)$ 中满足条件

$$f(t)=1,t\in D$$

的函数类中的极小函数.

**证明** 如 $f(t)=1$,则由定理 5.4.9 知

$$1 = |f(t)|^2 = |\int_D f(z)K(t,\bar{z})dv_z|^2$$

$$\leqslant \int_D |f(z)|^2 dv_z \int_D |K(t,\bar{z})|^2 dv_z = K(t,\bar{t})\int_D |f(z)|^2 dv_z,$$

这表示

$$\int_D |f(z)|^2 dv_2 \leqslant \frac{1}{k(t,\bar{t})}.$$

但是

$$\int_D |\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}|^2 dv_z = \frac{1}{K(t,\bar{t})},$$

故$\dfrac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}$是满足所设条件的极小函数. □

**定理 5.4.11** 当 $\zeta = z$ 时,$D$ 域的核函数可以定义为

$$K(z,\bar{z}) = \sup_{h\in H}|h(z)|^2, z \in D,$$

此处 $H$ 代表一函数类,其中任一函数 $h(z)$ 在 $D$ 全纯并满足

$$\int_D |h(z)|^2 dv_z \leqslant 1.$$

**证明** 命

$$\varphi(\zeta) = \frac{K(\zeta,z)}{\sqrt{K(z,\bar{z})}},$$

显见 $\varphi(\zeta) \in H$,故

$$K(z,\bar{z}) = |\varphi(z)|^2 \leqslant \sup_{h\in H}|h(z)|^2.$$

如 $h(z) \in H$,则由定理 5.4.10 知

$$|h(z)|^2 \leqslant \frac{|h(z)|^2}{\int_D |h(\zeta)|^2 dv_\zeta} = \frac{1}{\int_D |\frac{h(\zeta)}{h(z)}|^2 dv_\zeta}$$

$$\leqslant \frac{1}{\int_D |\frac{K(\zeta,\bar{z})}{K(z,\bar{z})})|^2 dv_\zeta} = K(z,\bar{z}).$$

故

$$K(z,\bar{z}) \geqslant \sup_{h\in E}|h(z)|^2,$$

$$K(z,\bar{z}) = \sup_{h\in H}|h(z)|^2. \square$$

定理 5.4.11 表示，$K(z,\bar{z})$ 与 $D$ 域的完整系的选择无关，再由定理 5.4.10 以及定理 5.4.7 证明中的 Ⅲ）所证极小函数的唯一性可知 $K(z,\bar{\zeta})$ 也与完整系的选择无关.

由定理 5.4.11 立知

**定理 5.4.12** 设两有界域 $D_1$ 与 $D_2$，满足 $D_1 \subset D_2$，其核函数分别为 $K_{D_1}(z,\bar{z})$ 与 $K_{D_2}(z,\bar{z})$，则

$$K_{D_1}(z_1,\bar{z}) \geqslant K_{D_2}(z,\bar{z}), z \in D_1.$$

**证明** 命 $H_1$ 及 $H_2$ 分别为在 $D_1$ 及 $D_2$ 的全纯函数并分别满足条件

$$\int_{D_1}|h(z)|^2 dv_z \leqslant 1, \int_{D_2}|h(z)|^2 dv_z \leqslant 1,$$

的函数集合，凡属于 $H_2$ 的函数必属于 $H_1$，因此

$$\sup_{h\in H_1}|h(z)|^2 \geqslant \sup_{h\in H_2}|h(z)|^2$$

故由定理 5.4.11 知

$$K_{D_1}(z,\bar{z}) \geqslant K_{D_2}(z,\bar{z}), z \in D_1. \square$$

**定理 5.4.13** 设 $D_1$ 与 $D_2$ 分别是 $C^n$ 与 $C^m$ 空间的有界域，$D$ 为其拓扑积 $D_1 \times D_2$，则 $D$ 域的核函数是 $D_1$ 域与 $D_2$ 域的核函数的乘积.

**证明** 设 $D_1$ 在 $z_1,\cdots,z_n$ 空间，$D_2$ 在 $z_{n+1},\cdots,z_{n+m}$ 空间、分别以 $K_{D_1}(z_1,\cdots z_n,\bar{\zeta}_1,\cdots,\bar{\zeta}_n)$ 及 $K_{D_2}(z_{n+1},\cdots,z_{n+m},\bar{\zeta}_{n+1},\cdots,\bar{\zeta}_{n+m})$ 表示 $D_1$ 与 $D_2$ 域的核函数，又设 $D$ 域的核函数为

$$K_D(z,\bar{\zeta}) = K_D(z_1,\cdots z_{n+m},\bar{\zeta}_1,\cdots,\zeta_{n+m}).$$

那末根据定理 5.4.9 及 Fubini 定理知道，当 $t \in D, \zeta \in D$ 时

$$K_{D_1}(t_1,\cdots t_n,\bar{\zeta}_1,\cdots\bar{\zeta}_n)K_{D_2}(t_{n+1},\cdots t_{n+m},\bar{\zeta}_{n+1},\cdots,\bar{\zeta}_{n+m})$$

$$= \int_D K_{D_1}(z_1,\cdots,z_n,\bar{\zeta}_1\cdots\bar{\zeta}_n)K_{D_2}(z_{n+1},\cdots,z_{n+m},\bar{\zeta}_{n+1},\cdots,\bar{\zeta}_{n+m})K_D(t,\bar{z})dv_z$$

$$= \int_{D_1} K_{D_1}(z_1,\cdots,z_n,\overline{\zeta}_1,\cdots,\overline{\zeta}_n)\prod_{a=1}^{n} dx_a dy_a \int_{D_2} K_D(t,\overline{z})$$

$$K_{D_2}(z_{n+1},\cdots,z_{n+m},\overline{\zeta}_{n+1},\cdots,\overline{\zeta}_{n+m})\prod_{a=n+1}^{n+m} dx_a dy_a$$

$$= K_D(t,\overline{\zeta}).\ \square$$

**定理 5.4.14** 若有一全纯变换

$$T: w_1 = \varphi_1(z),\cdots,w_n = \varphi_n(z)$$

把有界域$D$一一地映为一有界域$D_1$,则域$D$的核函数$K_D(z,\overline{\zeta})$与域$D_1$的核函数$K_{D_1}(w,\overline{\xi})$的关系为

$$K_D(z,\overline{\zeta}) = K_{D_1}(w,\overline{\xi})\det\frac{\partial(w_1,\cdots,w_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\overline{\frac{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}},$$

其中 $\xi_a = \varphi_a(\zeta), a = 1,\cdots,n.$

**证明** 与单复变数的情形类似,变换$T$的函数行列式不为零(Б. А. Фукс[1962] 定理 7.3),再由定理 1.1.9 或定理 1.4.1 知

$$(5.4.12)\qquad dv_z = \left|\det\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\right|^2 dv_w$$

这表示,如 $f(z)\in L^2H(D)$,则 $f(z(w))\det\dfrac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}$ 属于 $L^2H(D_1)$. 如 $\{\varphi_k(z)\}$ 是 $L^2H(D)$ 的一正交正规函数系,则 $\left\{\varphi_k(z(w))\det\dfrac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\right\}$ 是 $L^2H(D_1)$ 的一正交正规函数系. 此外,若$\{\varphi_K(z)\}$是对 $L^2H(D)$ 完整的,则$\left\{\varphi_k(z(w))\det\dfrac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\right\}$对$L^2H(D_1)$也是完整的,这只要证明:若任一$f(w)\in L^2H(D_1)$并满足

$$(5.4.13)\qquad \int_{D_1} f(w)\,\overline{\varphi_K(z(w))}\,\overline{\det\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}}dv_w = 0,$$

$$k = 0,1,\cdots$$

则 $f(w)\equiv 0$.

由(5.4.12)知(5.4.13)即

$$\int_D \left[f(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))\det\frac{\partial(w_1,\cdots,w_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right]\overline{\varphi_k(z)}dv_z = 0,$$

但$f(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))\det\frac{\partial(w_1,\cdots,w_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$是属于$L^2H(D)$的，而$\{\varphi_k(z)\}$是完整的，因此

$$f(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))\det\frac{\partial(w_1,\cdots,w_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\equiv 0,$$

但 $$\frac{\partial(w_1,\cdots,w_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\neq 0,\text{故 } f(w)\equiv 0.$$

由此可知 $D_1$ 的核函数为

$$K_{D_1}(w,\bar{\xi})=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z(w))\,\overline{\varphi_k(\zeta(\xi))}\det\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\overline{\frac{\partial(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{\partial(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n)}}$$

$$=K_D(z,\bar{\zeta})\det\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\overline{\frac{\partial(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{\partial(\xi_1,\cdots\cdots\xi_n)}}.$$

这就证明了定理.□

### 5.4.4 $\mathbf{R}_4$ 中的特殊域及其核函数

$\mathbf{R}_4$ 中的 **Reinhardt** 圆型域可以表为

$$\mathscr{R}=E\{|z_2|^2<g(|z_1|),|z_1|<R\},$$

易知在其上的完整正交正规函数系为

(5.4.14) $$\varphi_\nu(z)=\frac{z_1^{m_\nu}z_2^{n_\nu}}{a_{m_\nu n_\nu}},$$

$$a^2_{m_\nu n_\nu}=\frac{\pi^2}{n_\nu+1}\int_0^{R^2}[g(r_1)]^{n_\nu+1}r_1^{2m_\nu}d(r_1^2),$$

由于

$$\int_{\mathscr{R}}z_1^{m_\nu}z_2^{n_\nu}\bar{z}_1^{m_\mu}\bar{z}_2^{n_\mu}dv_z$$

$$=\int_0^R\int_{r=0}^{\sqrt{g(r_1)}}r_1^{m_\nu+m_\mu+1}r_2^{n_\nu+n_\mu+1}dr_1dr_2.$$

(5.4.15) $$\int_0^{2\pi}e^{i\varphi_1(n_\nu-m_\mu)}d\varphi_1\cdot\int_0^{2\pi}e^{i\varphi_2(m_\nu-m_\mu)}d\varphi_2$$

$$=0,\text{若 }\nu\neq\mu,$$

$$=\frac{\pi^2}{n_\nu+1}\int_0^{R^2}(r_1^2)^{m_\nu}[g(r_1)]^{n_\nu+1}d(r_1^2),\text{若 }\nu=\mu.$$

**在双圆柱** $\mathscr{B}=E\{|z_k|<r_k\}$ 的情形我们有

(5.4.16) $$a_{mn}=\frac{\pi r_1^{m+1}r_2^{n+1}}{\sqrt{(m+1)(n+1)}},$$

在超球 $S=E\{|z_1|^2+|E_2|^2<r^2\}$ 的情形我们有

(5.4.17) $$a_{mn}=\pi r^{m+n+2}\sqrt{\frac{n!m!}{(m+n+2)!}}$$

在圆型域 $C_p=E\{a|z_1|^{2/p}+|z_2|<1\}$，$p$：正整数，$0<a\leqslant 1$，的情形我们有

(5.4.18) $$a_{mn}=\pi\sqrt{\frac{p[(m+1)p-1]!n!}{a^{p(m+1)}[(m+1)p+n+1]!}}$$

有了完整正交正规函数系后，我们容易求得这些域的核函数如下：

(5.4.19) $$K_{\mathscr{R}}(z,\overline{\zeta})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1\overline{\zeta})^m(z_2\overline{\zeta}_2)^n}{a_{mn}^2},$$

(5.4.20) $$K_{\mathscr{B}}(z,\overline{\zeta})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+1)(n+1)z_1^m z_2^n\overline{\zeta}_1^m\overline{\zeta}_2^n}{\pi^2 r_1^{2m+2}r_2^{2n+2}}$$
$$=\frac{r_1^2r_2^2}{\pi^2(r_1^2-z_1\overline{\zeta}_1)^2(r_2^2-z_2\overline{\zeta}_2)^2},$$

(5.4.21) $$K_S(z,\overline{\zeta})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m+2)!(z_1\overline{\zeta}_1)^m(z_2\overline{\zeta}_2)^n}{\pi^2 r^4 m!n!r^{2(m+n)}}=$$
$$\frac{2r^2}{\pi^2[r^2-z_1\overline{\zeta}_1-z_2\overline{\zeta}_2]^3},$$

(5.4.22) $$K_{C_p}(z,\overline{\zeta})=$$
$$\frac{a^p(1-z_2\overline{\zeta}_2)^{p-2}[(p+1)(1-z_2\overline{\zeta}_2)^p+(p-1)a^pz_1\overline{\zeta}_1]}{\pi^2[(1-z_2\overline{\zeta}_2)^p-a^pz_1\overline{\zeta}_1]^3}$$

华罗庚[1958]利用群表示论和可逆域的性质具体算出了四类典型域的完整系和核函数.

### 5.4.5 Bergman 度量

设 $K(z,\overline{z})$ 为 $D$ 域的核函数，作 $n\times n$ 方阵 $T$，其第 $i$ 列第 $j$ 行的元素为

(5.4.23) $$T_{i\overline{j}}=\frac{\partial^2\log K(z,\overline{z})}{\partial z^i\partial\overline{z}^j},$$

$T$ 显然是 Hermite 方阵并且是 Hermite 共变张量.

定义度量

$$ds^2 = dzT d\bar{z}' = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z,\bar{z})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i d\bar{z}^j, \tag{5.4.24}$$

称为 Bergman 度量. 显然 Bergman 度量满足定理 3.7.1 中的 Kaehler 条件,所以 Bergman 度量是一 Kaehler 度量.

**定理 5.4.15** 一有界域的度量方阵 $T(z,\bar{z})$ 在 $D$ 中任一点 $z$ 是定正的,换句话说如果 $u=(u^1,\cdots,u^n)$ 是一非零向量,则 $uTu' > 0$.

**证明** 任取一点 $t \in D$,应用 Lagrange 乘数法可以证明在 $L^2H(D)$ 中有一适合条件

$$f(t) = 0, \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f(t)}{\partial t_\alpha} u^\alpha = 1,$$

的极小函数 $f(z)$,其极小值为(陆启铿[1961])

$$\int_D |f(z)|^2 dv_z = \frac{1}{K(t,\bar{t})\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha \partial \bar{t}_\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta\}}$$

$$= \frac{1}{K(t,\bar{t}) u T \bar{u}'}.$$

由于 $0 < \int_D |f|^2 dv_z < \infty$ 及 $K(t,\bar{t}) > 0$(定理 5.4.8) 可知对任一组不全为零的复数 $u = (u^1,\cdots,u^n)$

$$uTu' > 0$$

定理证明.□

**定理 5.4.16** 度量(5.4.24)是全纯变换下的不变量,换句话说,如有一全纯变换把 $D$ 域一一地映为 $D'$ 域,则 $D$ 域的度量经过变换为 $D'$ 域的度量.

**证明** 设全纯变换为

$$w = f(z), \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \neq 0,$$

由定理 5.4.14 知

$$K_{D'}(w,\overline{w}) = K_D(z(w),\overline{z}(w))\,|\det(\frac{\partial z}{\partial w})|^2,$$

$$\frac{\partial^2 \log K_{D'}(w,\overline{w})}{\partial w^i \partial \overline{w}^j}$$

$$= \frac{\partial^2 \log\{K_D[z(w),\overline{z}(w)]\,|\det(\frac{\partial z}{\partial w})|^2}{\partial z^r \partial \overline{z}^s}\frac{\partial z^r}{\partial w^i}\frac{\partial \overline{z}^s}{\partial \overline{w}^j}$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K_D(z,\overline{z})}{\partial z^r \partial \overline{z}^s}\frac{\partial z^r}{\partial w^i}\frac{\partial \overline{z}^s}{\partial \overline{w}^j},$$

这表示

$$\frac{\partial^2 \log K_{D_1}(w,\overline{w})}{\partial w^i \partial \overline{w}^j} dw^i d\overline{w}^j = \frac{\partial^2 \log K_D(z,\overline{z})}{\partial z^i \partial \overline{z}^j} dz^i d\overline{z}^j.$$

定理证明. □

## § 5.5 双全纯映射的 Fefferman 定理

在单复变函数论中,两个有光滑边界的区域之间的单叶映射可以光滑地延拓到边界上,在多复变函数论中是否成立类似的事实,是多年来没有解决的一个重要猜想. 1974 年,美国青年数学家 Charles Fefferman[1974] 在这个问题上取得了重大突破. 他在 j, Kohn 关于 $\overline{\partial}$-Neumann 问题的研究基础上,结合微分几何的许多技巧证明了下述

**定理 5.5.1** (Fefferman) 设 $D_1, D_2$ 是 $C^n$ 中两个有界光滑边界的有界强拟凸域,那末 $D_1, D_2$ 之间的任何双全纯映射都可以光滑地延拓到边界上,使它成为 $\overline{D}_1$ 与 $\overline{D}_2$ 之间的 $C^\infty$ 微分同胚.

单复变数中的定理第一个证明的似乎是 p. Painleve' "Sur la théorie de la représentation conforme", C. R. Acad. Science Paris 112, 653-657(1891). 其他给出证明的是 O. D. Kellogg, Trans. Amer. Math. Soc 13, 109-132(1912), 和 S. Warschawski, Math. Zeitschrift35, 321-456(1932). 但这些证明方法都不能用在高维的

情形，例如 Kellogg 的方法是利用调和估计和 Jordan 曲线定理.

Fefferman 映射定理在强拟凸域的分类中是十分重要的，相当于 Riemann 映射定理在单变数中的作用. 事实上，由 Fefferman 的结果，$C^n$ 中两个光滑有界强拟凸域 $D_1$ 和 $D_2$ 是否双全纯等价的问题变为一个是否存在一个满足切线 Cauchy-Riemann 方程的微分同胚 $\hat{F}: \partial D_1 \to \partial D_2$ 的问题，我们知道在 $n \geqslant 2$ 的情况，对这样的映射 $\hat{F}$ 的存在有一无穷序列的微分障碍，甚至是局部的情形也是这样，但是如果 $n = 1$，由 Riemann 映射定理在局部不存在障碍；但是这些障碍，至少在原则上是可以计算的. 在 $n = 2$ 时，E. Cartan 在 1932 年已经发现这个事实（"Sur la ge'ome'trie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes"，Oeuvres Ⅱ，2，1231—1304，and Ⅲ，2 1217—1238）. 在一般的情形最近已由 N. Tank[1967] 和 S. S. Chern 和 J. Moser[1974] 进行了研究. 由 Fefferman 定理可以看出，如果 $D_1$ 和 $D_2$ 在双全纯映射 $\varphi$ 下是等价的，那末在 $\partial D_1$，$\partial D_2$ 上有些微分不变量在 $\varphi$ 下是不变的. 更确切地说，如果 $k$ 很大，那末 $\partial D_1$ 的定义函数 $\rho_1$（同样 $\partial D_2$ 的定义函数 $\rho_2$）的 $k$ 次 Taylor 展开的系数比 $\varphi$ 的 $k$ 次 Taylor 展开的更多. 由于 $\rho_1$ 经映射 $\varphi^{-1}$ 变为 $\rho_2$，可知某些多出来的系数或者是它们的组合，必须在双全纯映射下是不变的. Tanaka，Chern 和 Moser 曾对此作出明确的说明并指出怎样来计算这些不变量.

这里给出的 Fefferman 定理的证明和原来的不同而且更为初等. 值得注意的是，这个方法可以应用在更一般的情况，只要 Bergman 射影的必要正则性可以建立，这个证明的主要思想是在 70 年代末发展起来的，开始于 S. Webster[1979] 的论文在 S. Bell &E. Ligocka[1980] 的论述达到了高峰，在此之后，这些方法在许多问题的研究中都已证明十分富有成效. Bell 和 Ligocka 的证明避开了许多繁复的微分几何技巧，并能证明比定理 5. 5. 1 更多的结果.

### 5.5.1　予备知识

设 $L^2H(D)$ 表示 $D$ 上全纯的 $L^2$ 函数，它是 $L^2(D)$ 的闭子空间，存在一个正交射影算子

$p = p_D: L^2(D) \to L^2H(D)$.

$p$ 是一个范数是1的有界Hermite算子，对 $f \in L^2H(D)$，它满足 $pf = f$. 我们可以看出抽象算子 $p_D$—— 称为**Bergman 射影** —— 可以由关于 Bergman 核的积分给出.

**定理 5.5.2**

对所有的 $f \in L^2(D)$ 和 $E \in D$, Bergman 射影 $p_D: L^2(D) \to L^2H(D)$ 满足

(5.5.1)　$(p_D f)(z) = (f, K_D(\cdot, \bar{z})) = \int_D f(\zeta) K_D(z, \bar{\zeta}) dv_\zeta.$

**证明**　给定 $f \in L^2(D)$，应用再生性质(5.4.10)

到 $pf \in L^2H(D)$，得到

(5.5.2)　$pf(z) = (pf, k_D(\cdot, \bar{z}))$,

由于 $p$ 是 Hermite 的并且 $K_D(\cdot, \bar{z}) \in L^2H(D)$，我们得到

(5.5.3)　$(pf, K_D(., \bar{z})) = (f, pK_D(\cdot, \bar{z})) = (f, K_D(\cdot, \bar{z}))$,

因此(5.5.1)成立. □

如果 $D$ 是 $C^n$ 中的一光滑有界域，函数 $\rho: C^n \to R$ 称为 $D$ 的定义函数，如果 $\rho \in C^\infty(C^n)$, $D = \{z: \rho(z) < 0\}$, $\partial D = \{z: \rho(z) = 0\}$ 并且在 $\partial D$ 上 $\mathrm{grad}\rho \neq 0$.

函数 $q$ 称为在 $\partial D$ 上 $S$ 阶为零，如果对所有多重指标 $|\alpha| \leqslant S$ 和 $\xi \in \partial D$, $D^\alpha g(\xi) = 0$.

$W^S(D)$ 表示 $D$ 上复值函数的通常的 Sobolev 空间，其内积定义为

$$< u, v >_S = \sum_{|\alpha| \leqslant S} \int_D D^\alpha u \overline{D^\alpha v}.$$

$W_0^s(D)$ 表示 $C_0^\infty(D)$ 在 $W^s(D)$ 中的闭包. 注意如果函数 $q$ 是光滑

到边界 $\partial D$,并且在 $\partial D$ 上 $S-1$ 阶为零,那末 $q \in W_0^s(D)$.

$H^s(D)$ 是 $W^s(D)$ 中全纯函数构成的子空间.

$C^\infty(\overline{D})$ 是 $D$ 中光滑到边界的复值函数的空间,又 $H^\infty(\overline{D})$ 是 $C^\infty(\overline{D})$ 中全纯函数构成的子空间. 注意 $C^\infty(\overline{D}) = \bigcap_{S \geqslant 0} W^s(D)$ 和 $H^\infty(\overline{D}) = \bigcap_{S \geqslant 0} H^s(D)$,由 Sobolev 引理,它说明 $W^{s+n}(D) \subset C^s(\overline{D})$ 和 $\sup_{\substack{|\alpha| \leqslant S \\ \xi \in D}} | \in D^\alpha f(\xi) | \leqslant C \|f\|_{w^{s+n}(D)}$.

$C^\infty(\overline{D})$ 中的函数序列 $u_i$ 收敛于 $u$,如果对每一多重指标 $\alpha$ 在 $D$ 上一致地有 $D^\alpha u_i \to D^\alpha u$.

### 5.5.2 条件 R 和 Fefferman 定理

**定义 5.5.1** $C^n$ 中的区域 $D$ 称为满足**条件 R**,如果它是光滑的有界的,并且对每一 $S \geqslant 0$,存在 $M \geqslant 0$ 使得 Bergman 射影 $P: L^2(D) \to L^2H(D)$ 是从 $W_0^{S+M}(D)$ 到 $H^s(D)$ 的一个有界算子,即

Ⅰ) $p(W_0^{S+W}(D)) \subset H^s(D)$,

Ⅱ) $\|pf\|_{H^s(D)} \leqslant C_s \|f\|_{W_0^{s+m}(D)}$.

**注**:从下面引理 5.5.1 的证明可知条件 $R$ 等价于显然较强的条件:

对每一 $S \geqslant 0$,存在 $M \geqslant 0$ 使得 Bergman 射影 $P$ 是从 $W^{s+m}(D)$ 到 $H^s(D)$ 的一个有界算子.

我们可以证明下列拓广的 **Fefferman 定理**

**定理 5.5.3** 如果 $D_1$ 和 $D_2$ 满足条件 $R$,那末 $D_1$ 和 $D_2$ 之间的任何双全纯映射都可光滑延拓到边界.

**说明**:下列区域是已知满足条件 $R$ 的

1. 具有实解析边界的光滑有界拟凸域(J. J. Kohn[1977][1979],K. Diederich & J. Fornaess [1978]).

2. 光滑有界强拟凸域(J. J. Kohn[1963][1964])

3. 任何存在 $\overline{\partial}$—Neumann 算子和满足次椭圆估计的光滑有界

域.

在光滑有界强拟凸域上 $\bar{\partial}$—Neumann 算子 $N$ 的次椭圆估计和正则性定理是 J. J. Kohn[1963][1964] 证明的，这些结果在 G. Folland &J. J. Kohn[1972] 中详细介绍. 由 Kohn 的工作可知 Bergman 射影 $P$ 可以写成 $I-\bar{\partial}^* N\bar{\partial}$，所以由 $N$ 的次椭圆估计就可推出条件 $R$.

J. J. Kohn[1977][1979] 叙述了 $\bar{\partial}$- 问题次椭圆性的充份条件. K Diederich &J. Fornaess[1978] 证明了具有实解析边界的有界拟凸域 Kohn 的条件成立. 因此，在这情形条件 $R$ 成立.

上述三类区域满足条件 $R$ 我们作为已知事实加以利用，它们的证明已见于上引文献，也可在 R. M. Range[1986] 中找到，然而它们的证明比 Fefferman 定理原来的证明要容易得多.

因此我们有

**推论 5.5.1** 如果 $D_1$ 和 $D_2$ 是上述类型 1,2,3 中区域，那末 $D_1$ 和 $D_2$ 之间的任何双全纯映射都可光滑延拓到边界.

**推论 5.5.3** 如果一个具有实解析边界的有界拟凸域双全纯等价于一个光滑有界强拟凸域，那末它也是强拟凸域.

### 5.5.3 关于 Bergman 核函数的条件 A 和条件 B

在证明拓广的 Fefferman 定理 5.5.3 之前我们先介绍

**定义 5.5.2** $C^n$ 中的光滑有界域 $D$ 称为满足条件 $A$ 和 $B$，如果 $D$ 的 Bergman 核函数 $K(z,\bar{\zeta})$ 满足：

**条件 A** $K(\cdot,\bar{w})\in C^\infty(\bar{D})$ 对每一 $w\in D$，和

**条件 B** 对每一 $z_0\in\partial D$，存在 $D$ 中的 $n+1$ 个点 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得 $K(z_0,\bar{a}_0)\neq 0$，并且

$$\det\begin{pmatrix} K(z_0,\bar{a}_j) \\ \dfrac{\partial K}{\partial z_i}(z_0,\bar{a}_j)\end{pmatrix}_{\substack{i=1,\cdots,n\\ j=0,1,\cdots,n}}\neq 0.$$

### 5.5.4 定理 5.5.3 的证明

只要证明下列两引理，定理 5.5.3 就已证明.

**引理 5.5.1** 如果 $D$ 满足条件 $R$，那末它就满足条件 $A$ 和 $B$.

**引理 5.5.2** 如果 $D_1$ 和 $D_2$ 满足条件 $A$ 和 $B$，那末 $D_1$ 和 $D_2$ 之间的任何双全纯映射都可光滑延拓到边界.

### 5.5.5 引理 5.5.1 的证明

引理 5.5.1 的证明需要三部份.

**第一部分**(N. Kerzman[1972]). **由条件 $R$ 可推论条件 $A$.**

**证明** 对 $w \in D$，命 $\varphi \in C_0^\infty(D)$ 为关于 $w$ 径向对称且 $\int_{C^n} \varphi dv = 1$. 对每一调和函数 $f$，

$$f(w) = \int_D f(z)\,\overline{\varphi(z)} dv_z.$$

因此，$p\varphi = K(\cdot, \overline{w})$，条件 $R$ 和 Soblev 引理表明 $K(\cdot, \overline{w}) \in C^\infty(D)$.

□

**第二部分** $\{K(\cdot, w): w \in D\}$ **的线性生成(lineav span)在 $H^\infty(\overline{D})$ 中是稠密的.**

**证明** 首先对每一 $S \geqslant 0$ 我们证明 $H^\infty(\overline{D}) \subset P(W_0^S(D))$. 对 $u \in C^\infty(\overline{D})$，我们构造满足 $Pq = 0$ 的 $q \in C^\infty(\overline{D})$ 使得 $u$ 和 $q$ 在 $\partial D$ 上一直到 $S-1$ 阶是一致的. 单位分解充许我们假设 $u$ 在点 $z_0 \in \partial D$ 附近有小支集. 命 $\rho$ 为 $D$ 的定义函数，又 $z_1$ 为一复方向使得 $\frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z_0) \neq 0$. 我们假设 $u$ 的支集包含在 $\{w \in \overline{D}: \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(w) \neq 0\}$.

置 $v(z) = \frac{\operatorname{grad}\rho}{|\operatorname{grad}\rho|^2}$ 并命 $(\frac{\partial}{\partial v})_z$ 表示沿方向 $v(z)$ 的微分.

我们通过下列公式归纳地定义函数 $\theta_k(z) \in C^\infty(\overline{D})$：

$$\theta_0 = \frac{u}{(\frac{\partial \rho}{\partial z_1})}, U_l = u - \frac{\partial}{\partial z_1}(\sum_{k=0}^{l} \theta_k \rho^{k-1})$$

$$\theta_{l+1}=\frac{(\frac{\partial}{\partial v})^{l+1}U_l}{(l+2)!\,\frac{\partial\rho}{\partial z_1}}.$$

命 $q=\frac{\partial}{\partial z_1}(\sum_{k=0}^{S-1}\theta_k\rho^{k+1})$. 容易验证在 $\partial D$ 上, $u$ 和 $q$ 一直到 $S-1$ 阶是一致的. 注意 $q=\frac{\partial g}{\partial z_1}$, 其中 $g$ 在 $\partial D$ 上为零; 所以

$$Pq=\int_D K(\cdot,\overline{w})\frac{\partial g}{\partial z_1}(w)dv_w=0,$$

因为 $K(z,\overline{w})$ 关于 $\overline{w}$ 是全纯的(或称关于 $w$ 是反全纯或共轭全纯的). 因此 $Pu=p(u-q)$ 其中 $u-q\in W_0^s(D)$.

由此知 $H^\infty(\overline{D})\subset p(W_0^s(D))$.

命 $\Phi$ 表示函数 $\varphi\in C_0^\infty(D)$ 中关于 $D$ 中某些点是径向对称的并且 $\int_{C^n}\varphi dv=1$ 的函数的集合. 注意 $p\Phi=\{K(\cdot,\overline{w}):w\in D\}$.

现在我们证明对每一 $S\geqslant 0$, $\Phi$ 的线性生成在 $W_0^s(D)$ 中是稠密的, 假设 $f$ 是 $C_0^\infty(D)$ 中的一函数. 命 $\psi$ 是 $C_0^\infty(C^n)$ 中的一函数, 关于原点是径向对称的, 并有包含在单位球中的支集使得 $\int_{C^n}\psi dv=1$. 对 $\varepsilon>0$ 置 $f_\varepsilon(w)=\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{C^n}\psi(\frac{z-w}{\varepsilon})f(z)dv_z$, 那末当 $\varepsilon\to 0$ 时, 在 $W_0^s(D)$ 中 $f_\varepsilon\to f$, 再用有限 Riemann 和来逼近 $f_\varepsilon$ 就知道 $\Phi$ 的线性生成在 $W_0^s(D)$ 中的稠密性.

现在由条件 $R$ 知道, 对每一 $S$, 生成 $\{K(\cdot,\overline{w}):W\in D\}$ 的 $H^s(D)$ 闭包包含 $H^\infty(\overline{D})$. 因此, 由 Sobolev 引理, 生成 $\{K(\cdot,w):W\in D\}$ 在 $H^\infty(\overline{D})$ 中是稠密的. □

**第三部分　由条件 $R$ 推出条件 $B$.**

**证明**　由

$$F_{z_0}(t_0,t_1,\cdots,t_n)=\det\begin{pmatrix}K(z_0,t_j)\\ \frac{\partial K}{\partial z_i}(z_0,t_j)\end{pmatrix}_{\substack{i=1,\cdots,n\\ j=0,1,\cdots,n}}$$

给出的函数 $F_{z_0}: D^{n+1} \to C$

不能恒等于零，因为如果这样，那末由第二部份就可推出

$$\det\begin{pmatrix} g_j(z_0) \\ \frac{\partial g_j}{\partial z_i}(z_0) \end{pmatrix}_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=0,1,\cdots,n}} = 0$$

对 $H^\infty(\overline{D})$ 中的每 $n+1$ 个函数 $g_0,\cdots,g_n$；特别，如果 $g_0 = 1, g_1 = z_1, \cdots, g_n = z_n$. 矛盾. 因此存在 $D$ 中的 $n+1$ 个点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使 $F_{z_0}(a_0, a_1; \cdots, a_n) \neq 0$. 如果需要，将它们重新编号，使得 $K(z_0, a_0) \neq 0$. □

### 5.5.6 引理 5.5.2 的证明

命 $K_1(z,\overline{w})$ 和 $K_2(s,\overline{t})$ 分别在区域 $D_1$ 和 $D_2$ Bergman 核函数，命 $h$ 为从 $D_1$ 到 $D_2$ 的双全纯映上映射，又命 $Jh(z) = \det(\frac{\partial h_j}{\partial z_i})(z)$ 表示它在 $z \in D_1$ 的 Jacobi 行列式.

引理 5.5.2 的证明也需要三部分. 第一部份是根据 S. Webster[1979] 的论文.

**第一部分　函数 Jh(z) 和 $(\mathbf{Jh(z)})^{-1}$ 在 $\mathbf{D_1}$ 上是有界的**

**证明**　假设 $(Jh(z))^{-1}$ 不是有界的，那末存在一点列 $z_n \to z_0 \in \partial D_1$，使得 $Jh(z_n) \to 0$. 由 Bergman 核函数的变换规则

$K_1(z_n,\overline{a}) = K_2(h(z_n),\overline{h(a)})Jh(z_n)\overline{Jh(a)}$ 和条件 $A$ 就得出，对每一 $a \in D_1$，$K_1(z_0,a) = 0$. 这和条件 $B$ 矛盾.

将同样的论证应用到映射 $h^{-1}$ 就可证明 $Jh(z)$ 在 $D_1$ 上也是有界的. □

**第二部分　映射 h 可以连续延拓到边界**

**证明**　我们由证明偏导数 $\frac{\partial h_j}{\partial z_i}(z)$ 在 $D_1$ 上是有界函数来证明第二部份.

如果这事不真，那末我们可找到一点列 $z_n \to z_0 \in \partial D_1$ 使得 $S_n = h(z_n) \to S_0 \in \partial D_2$ 并且 $\underset{i,j}{Max} \left| \frac{\partial h_j}{\partial z_i}(z_n) \right| \to \infty$.

由条件 $B$，存在 $b_0,b_1,\cdots,b_n\in D_2$ 使得 $K_2(s_0,\bar{b}_0)\neq 0$ 并且

$$\det\begin{pmatrix} K_2(s_0,\bar{b}_j) \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial S_i}(S_0,\bar{b}_j)\end{pmatrix}_{\substack{i=1,\cdots,n\\ j=0,1,\cdots,n}}\neq 0.$$

由初等的行运算可知 $\det(\dfrac{\partial v_j}{\partial s_i}(S_0))_{i,j=1,\cdots,n}\neq 0$，其中 $v_j(s)=\dfrac{K_2(s,\bar{b}_j)}{K_2(s,b_0)}),j=1,\cdots,n.$

置 $a_0=h^{-1}(b_0),\cdots,a_n=h^{-1}(b_n)$，由第一部分知道 $K_1(z_0,\bar{a}_0)\neq 0$，并且函数 $u_j=\dfrac{K_1(\cdot,\bar{a}_j)}{K_1(\cdot,a_0)},j=1,\cdots,n$ 在 $z_0$ 附近是有定义的，由 Bergman 核函数的变换规则可以推出下列矩阵等式

$$[\frac{\partial u_j}{\partial z_i}(z_n)]=[\frac{\partial v_j}{\partial s_i}(S_n)\frac{\overline{Jh(a_j)}}{Jh(a_0)}]\circ[\frac{\partial h_j}{\partial z_i}(z_n)].$$

存在 $N>0$ 使得左端的矩阵元素在集合 $\{z_n\}_{z>N}$ 上是有界的，又右端的矩阵元素在集合 $\{S_n\}_{n>N}$ 上是有界的. 因此，导数 $\dfrac{\partial h_j}{\partial z_i},i,j=l,\cdots,n$ 在集合 $\{z_n\}_{n>N}$ 上是有界的，矛盾. □

**第三部分　$h$ 到边界的延拓是光滑的.**

**证明**　命 $z_0\in\partial D_1$，又命 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in D_1$ 为条件 $B$ 关联于 $z_0$ 的点. 记 $u_j=\dfrac{K_1(\cdot,\bar{a}_j)}{K_1(\cdot,\bar{a}_0)}$，$S_0=h(z_0)$，$b_j=h(a_j)$，及 $v_j=\dfrac{K_2(\cdot,\bar{b}_j)}{K_2(\cdot,\bar{b}_0)}$ 对 $j=1,\cdots,n.$

第二部分表示 $K_2(S_0,\bar{b})\neq 0$，

$$\det[\frac{\partial u_j}{\partial z_i}(z_0)]_{i,j=1,\cdots,n}\neq 0,$$

及

$$\det[\frac{\partial v_j}{\partial s_i}(s_0)]_{i,j=1,\cdots,n}\neq 0,$$

因此，存在 $C^n$ 中 $z_0$ 的邻域 $U$ 和 $S_0$ 的邻域使得 $h(\overline{D}_1\cap U)=\overline{D}_2\cap V$，并且使得函数 $u_j$ 和 $U_j$ 是分别在 $U$ 和 $V$ 上的光滑局部坐标. 映射

$h|_{\overline{D}_1\cap U}$ 可以在这些坐标中表为一线性映射，它的对角线矩阵为 $v_j = \frac{\overline{Jh(a_0)}}{Jh(a_j)}u_j$. 由此可知 $h$ 可以延拓为 $U$ 上的光滑映射. 这就完成了引理 5. 5. 2 的证明. □

定理 5. 5. 3 的证明完毕.

我们还可以证明下列更为精确的 Fefferman 映射定理.

**定理 5. 5. 4** 假设 $D_1$ 和 $D_2$ 是 $C^n$ 中的有界强拟凸域，它们的边界是 $C^{(2k+4)}$ 类的，其中 $k \geqslant 1$. 那末每一双全纯映射 $F: D_1 \to D_2$ 是 $C^{(k)}(\overline{D}_1)$ 类的.

Fefferman[1974] 原来的证明是讨论 $k=\infty$ 的情形. 这里给出的形式是 E. Ligocka[1984] 证明的.

关于 Fefferman 映射定理，在 R. M. Range[1986] 的书中有很详尽的介绍，读者可以参阅.

# 第五章 参考文献


华罗庚[1958]

陆启铿[1961]

陆启铿，钟同德[1957]

邱春晖[1988]

林亚先[1985]

钟同德[1987C][1988]

L. A. Aizenberg & A. P Yuzhakov[1983]

S. Bell&E. Ligocka[1980]

S. Bergman[1922][1947][1948]

S. Bochner[1943]

K. Diederich & J. Fornaess[1978]

C. Fefferman[1974]

G. Folland & J. J. Kohn[1972]

E. Ligocka[1984]

E. Martinnelli[1942]

J. Plemelj[1908]

R. M. Range[1986]

S. Wabster[1979]

В. А. Какинев[1959]

И. И. Привалов[1950]

Ю. В. Сохоцкий[1973]

Б. А. Фукс[1962]

Е. М. Чирка[1975]

R. Harvey & B. Lawson[1975]

R. Harvey & J. Polking[1979]

F. Hartogs [1906]

J. J. Kohn[1963][1964]

[1977][1979]

C. Laurent-Thiebaut[1982]

N. Kerzman[1972]

J. J. Khn & H. Rossi[1965]

# 第六章　层与上同调及其应用

在本章后面读者会看到在讨论 Cousin 问题 $I$ 的解时，很自然会引进层与上同调群的概念. 系数在 Abel 群层内的上同调理论（它是通常的系数在一（常数）群内的上同调理论的拓广），正是讨论象 Cousin 问题 $I$ 等问题的有效的自然的抽象工具.

层是 1946 年 J. Leray(C. RAcad. Sci, Paris 222(1946), 1366 — 1368) 引进到代数拓扑中，但是在 H. Cartan 1944 年的复分析论文 (H. Cartan: Colleeted Works. R. Remmert and J. — P. Serre, eds. Springer — Verlag, New York, 1979, 565 — 613) 中已隐函层的概念，并且稍后一些，在 K. Oka 的工作中 (K. Oka: Collected Papers. Transl. by R. Narasimhan, with Comments by H. Cartan, R. Remmert, ed. Springer — Verlay, New York, 1984, Ⅴ Ⅱ) 也独立地出现层的概念. 层的更早根源，当然是："芽"的连结集合（它是层的基本构件），它已经出现在 K. Weierstrass 的由全纯函数元素解析延拓所生成的"解析构形"的概念中.

H. Cartan 立刻觉察到层论及其相应的上同调论的重要性，并已经在他 1949 年的论文（见上引 H. Cartan: Collected Works, 618 — 653) 中系统介绍和应用层论复分析，并且表述了**凝聚解析层**的基本概念，它在 1950 年和 1960 年代发展成为现代复分析中的主要研究对象之一，为了把事情说得更清晰，必须强调层论在本质上是从局部到整体的一个十分有力的工具，特别是在复分析中的重大成就和广泛应用是那十分深刻的解析 —— 代数成果**凝聚**解析层.

本章我们简要地介绍层与上同调论，表述 Cousin 问题和除法问题以及它们用层和上同调这个抽象语言表述的解，关于凝聚解

析层的概念以及著名的 Cartan 定理 $A$ 和 $B$ 我们已经在 §4.11 和 §4.12 介绍并将它们应用到 Stein 流形上的积分表示理论中去.

读者如果要深入了解层和上同调论，可以读 H. Cartan（见上引 H. Cartan：Collected Works，669 — 683）和 J. P. Serre（Quelques proble'mes globaux relatifs aux varie'te's de Stein. Coll. Pulus. Var.，Bruxelles，1953，57 — 68）发表在 1953 年"Colloque sur les functions de plusieurs variables"in Bruxelles 的经典论文，还可参阅 1951 — 52Cartan 讨论班的报告（H. Cartan 1951/52），L. Hörmander [1973]R. Gunning & H. Rossi[1965] 以及 H. Grauert & R. Remmert[1979][1984]，H. Grauert 和 R. Remmert 是继 H. Cartan 和 K. Oka 之后在这个理论上有主要贡献的两位数学家.

## §6.1 层的定义和基本性质

### 6.1.1 层及其截影

定义 **6.1.1**（层） 设两拓扑空间 $\mathscr{F}$，$X$ 及映射 $\pi:\mathscr{F}\to X$ 满足

(1) $\pi$ 是连续的，并且是局部同胚的，

(2) 对于 $\forall\, x\in X$，$\mathscr{F}_x := \pi^{-1}(x)$ 是一个 Abel 群，

(3) 群运算对于 $\mathscr{F}$ 的拓扑是连续的，这时称 $\mathscr{F}$ 为 $X$ 上的**层**并记为 $(\mathscr{F},\pi,X)$. $\mathscr{F}_x$ 即 $\pi^{-1}(x)$ 称为 $x$ 上的**茎**（stalk）.

**注**：所谓"群运算对于 $\mathscr{F}$ 的拓扑是连续的"是指，如 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 表示拓扑空间 $\mathscr{F}$ 与其自身的拓扑积所成的拓扑积空间.

$$\mathscr{F}\circ\mathscr{F} = \{(f,g)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F} \mid \pi(f)=\pi(g)\}$$

$\mathscr{F}\circ\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 的子拓扑空间（即 $\mathscr{F}\circ\mathscr{F}$ 上赋以诱导拓扑积），则映射

$$m:\mathscr{F}\circ\mathscr{F}\to\mathscr{F}$$
$$(f,g)\mapsto f-g$$

是有意义的，所谓"群运算对于 $\mathscr{F}$ 的拓扑是连续的"就是指这个

映射 $m$ 是连续的.

现在我们用一些实际例子来说明层的概念. 设 $z \in C^m$ 是一个固定点,$U,V,W$ 是 $z$ 的开邻域. 为了强调一个函数的定义域,将 $U$,$V,W$ 上的函数分别写成 $f_U,g_V,h_W$ 等等. 若 $V \subset U$,那末 $f_U$ 在 $V$ 上的限制记成 $f_U|_V$,形式上,我们将 $f_U$ 与 $f_U|_V$ 看成是两个不同的函数.

**定义 6.1.2**(函数芽) 两个函数 $f_U,g_V$ 称为在点 $z$ 等价,如果存在开邻域 $W \subset U \cap V$,使得 $f_U|_W = g_V|_W$. 这种函数的一个等价类叫作在点 $z$ 的一个**函数芽**. 若该等价类由函数 $f$ 所决定,则将这个函数芽记成$\underline{f}$ 或$\underline{f_z}$.

在点 $z$ 的所有解析函数按定义 6.1.2 中的等价关系分类所得的函数芽叫做在点 $z$ 的**解析函数芽**,在点 $z$ 的解析函数芽全体记作 $\theta_Z$. 在点 $z$ 的所有 $C^\infty$ 函数按定义 6.1.2 中的等价关系分类所得函数芽叫做在点 $z$ 的 $C^\infty$ **函数芽**,在点 $z$ 的 $C^\infty$ 函数芽全体记作 $\mathscr{E}_Z$.

**例 6.1.1** $C^n$ 上解析函数芽的层 $\theta$.

层 $\theta \xrightarrow{\pi} C^n$ 的具体作法如下:

$\pi^{-1}(z) = \theta_Z$,事实上 $\theta_Z$ 等于在点 $z$ 的所有收敛幂级数,它按普通加法成一 Abel 群. 设$\underline{f}$ 为 $\theta_Z$ 中某个元素,它由在点 $z$ 的某个邻域 $U$ 中定义的解析函数 $f$ 所决定的等价类. 于是 $f$ 也同时决定了在 $\forall\ w \in U$ 的解析函数芽$\underline{f_W}$,这些 $\underline{f_W}$ 就组成了 $f$ 在 $\theta$ 中的一个邻域

$U(\underline{f}) = \{\underline{f_W}\,|\,w \in U, U$ 是 $f$ 的定义域$\}$.

按 $\pi$ 的定义有

$$\pi(\underline{f_W}) = w,$$

它显然是连续的,并且是局部同胚的. 于是

$$\underline{f} - \underline{g} = \underline{f - g},$$

群运算关于这个拓扑是连续的.

因为 $\pi^{-1}(z)$ 为一 Abel 群,我们也称 $\theta$ 是一个 Abel **群层**.

**例 6.1.2** 域 $D \subset C^n$ 上的 $C^\infty$ 函数芽的层 $\mathscr{E}$.

层 $\mathscr{E} \xrightarrow{\pi} D$ 的具体作法如例 1,对 $\forall\ z \in D$,令 $\pi^{-1}(z) = \mathscr{E}_Z$. $\underline{f_Z}$

$\in \mathscr{E}$ 在 $\mathscr{E}$ 中的一个开邻域为

$$U(\underline{f_z}) = \{\underline{fw} | w \in U, f \text{ 在 } U \text{ 是 } C^\infty \text{ 的}\}.$$

按这个拓扑，$\pi$ 是连续的，是局部同胚. $\pi^{-1}(z)$ 也是个 Abel 群，因此 $\mathscr{E}$ 也是一个 Abel 群.

$\theta$ 与 $\mathscr{E}$ 有一个重要区别，由全纯函数的唯一性定理，层 $\theta$ 是个 Hausdorff 空间，但层 $\mathscr{E}$ 却不是 Hansdorff 空间. 我们以 $R$ 上 $C^\infty$ 函数的芽层为例来说明.

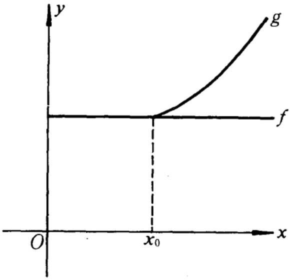



图 6.1

如图 6.1 所示，$f, g$ 是两个 $C^\infty$ 函数，其中 $f$ 是常值函数，而 $g$ 在 $x \leqslant x_0$ 时和 $f$ 相同. 显然，$f_{x_0}$ 和 $g_{x_0}$ 是不同的芽，但两者不能用邻域分开，因为包含 $\underline{f_{x_0}}$ 和 $\underline{g_{x_0}}$ 的任何邻域，不论多小，都包含有共同的常值函数的芽，所以层 $\mathscr{E}$ 不是 Hausdoff 空间.

除了层 $\theta$ 和 $\mathscr{E}$ 外，还可类似地考虑连续函数的芽层，常值函数的芽层，甚至任意函数的芽层.

**引理 6.1.1** 对 $\forall x \in X$，$\pi^{-1}(x)$ 中的零元素 $O_x$ 有一个邻域是 $O$.

**证明** 在 $\mathscr{F}$ 中取 $O_x$ 的邻域 $V$，使 $V$ 与 $\pi(V) \subset X$ 同胚，根据

群运算是 连续的(因为 $O_x - O_x = O_x$),$\exists\ U \subset V$,使

$$U \circ U \xrightarrow[\text{映入}]{\text{群运算}} V.$$

任取 $a \in U, \pi(a) = y \in \pi(V)$,故 $O_y = a - a \in V$,但 $\pi(O_y) = y, \pi(a) = y$,再由 $\pi$ 在 $V$ 上是同胚的,故 $a = O_y$. □

**引理 6.1.2** 设 $\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的一个层,$\pi$ 为它们的映射,则 $\pi$ 是开映射.

**证明** 设 $U \subset \mathscr{F}$ 是开集,则对 $\forall\ x \in \pi(U)$,存在 $t \in U$,使得 $\pi(t) = x$,因 $U$ 是开集,存在 $t$ 的一个开邻域 $V \subset U$,且 $\pi$ 在 $V$ 上是同胚映射,因此 $\pi(V)$ 是 $X$ 中的开集.显然 $x \in \pi(V) \subset \pi(U)$,因此 $\pi(U)$ 是 $X$ 中的开集,即 $\pi$ 是开映射. □

**定义 6.1.3**(截影) 设 $\mathscr{F} \xrightarrow{\pi} X$ 是一层,$U$ 是 $X$ 中的一个开子集,映射 $S: U \to \mathscr{F}$ 称为 $U$ 上的**截影**(Cròss Section),如果

(1)$S$ 是连续的,

(2)$\forall\ x \in U, \pi \circ s(x) = x$.

$U$ 上截影的全体记作 $\Gamma(U, \mathscr{F})$,显然 $\Gamma(U, \mathscr{F}) \neq \Phi$,例如零截影即在其中.

**定理 6.1.1** 设 $\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的一个层,如果两个截影 $S_1, S_2 \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ 在某点 $x_0 \in U, S_1(x_0) = S_2(x_0)$,那末存在 $x_0$ 的一个邻域 $V(x_0) \subset U$,使 $S_1|_V = S_2|_V$.

**证明** 因为 $S_1 - S_2 \in \Gamma(U, \mathscr{F})$,而 $(S_1 - S_2)(x_0) = O_{x_0}$,由引理 6.1.1,$O_{x_0}$ 的局部全是 $O$. 由截影的连续性,$\exists\ x_0$ 的邻域 $V(x_0) \subset U, S_1 - S_2: V \to Ox_0$ 的局部,所以 $S_1|_V = S_2|_V$.

**定理 6.1.2** 当 $U$ 是复流形 $X$ 的开集时,$\Gamma(U, \theta) = A(U)$.

**证明** 先设 $U$ 是 $X$ 的连通开集,任取 $S \in \Gamma(U, \theta)$ 及 $z \in U$ 有 $S(z) = \underline{f}_z$,由 $S$ 在 $z$ 点的连续性可知,任取 $f_z$ 的邻域 $\{\underline{f}_w | w \in V, f$ 在 $V$ 全纯,$V$ 是 $z$ 的某邻域$\}$,则存在 $z$ 的邻域 $W \subset V$,使 $\forall\ w \in W, s(w) \in \{\underline{f}_w|_{w \in V}$,而这就是说 $S|_w = f|_w$,换句话说,对 $\forall\ z \in U, S$ 在 $z$ 的

局部是同一全纯函数 $f$ 生成的芽. 对两个不同的这样的局部邻域 $W_1, W_2$，如 $W_1 \cap W_2 \neq \Phi$，则有 $f|_{W_1 \cap W_2} = g|_{W_1 \cap W_2} = s|_{W_1 \cap W_2}$，因此 $S(W_1 \cup W_2)$ 是同一全纯函数 $f$ 在 $W_1 \cup W_2$ 上生成的芽，再由 $U$ 的连通性，即得 $S(U) \in A(U)$.

当 $U$ 是一般开集时，则 $S$ 在 $U$ 的每一连通分支上都如此，因此在整体上仍有 $S(U) \in A(U)$. □

同样的结论对 $C^\infty$ 函数芽层，连续函数芽层，任意函数芽层，常值函数芽层都成立.

### 6.1.2 层同态，层同构，子层，商层

**定义 6.1.2**(层同态)　设 $\mathscr{F} \xrightarrow{\pi_1} X, \mathscr{Y} \xrightarrow{\pi_2} X$ 是 $X$ 上的两个层映射 $\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{Y}$ 称为**层同态**，如果

(1)　$\eta$ 是连续的，并且是保茎的(preserves Stalks)，即有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \xrightarrow{\eta} & \mathscr{Y} \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array} \qquad \pi_1 = \pi_2 \circ \eta$$

(2)　对 $\forall\, x \in X$，$\eta$ 在 $\pi_1^{-1}(x)$ 上的限制

$$\eta|_{\pi_1^{-1}(x)}: \mathscr{F}_x \to \mathscr{Y}_x$$

是一个群同态.

从定义可知，如果 $\eta: \mathscr{F} \to$ y ，$\tilde{\eta}: \mathscr{Y} \to \mathscr{H}$ 都是层同态，那末 $\tilde{\eta} \circ \eta: \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ 也是层同态.

**定义 6.1.5**(层同构)　如 $\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{Y}$ 和 $\tilde{\eta}: \mathscr{Y} \to \mathscr{F}$ 是层同态，并且 $\eta \circ \tilde{\eta} = id$ 和 $\tilde{\eta} \circ \eta = id$. 则称 $\eta$ 和 $\tilde{\eta}$ 是**层同构**，这时 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{Y}$ 称为 $X$ 上的同构层，记作 $\mathscr{F} \cong \mathscr{Y}$.

**定义 6.1.3**　层同态是局部同胚的.

**证明** 设 $\mathscr{F}\xrightarrow{\pi_1}X,\mathscr{Y}\xrightarrow{\pi_2}X$ 是 $X$ 上的两个层，而 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{Y}$ 是层同态. 任取 $a\in\mathscr{F}$，记 $b=\eta(a)\in\mathscr{Y}$，要证 $\eta$ 在 $a$ 的局部是同胚的. 因为 $\eta$ 是连续的，$\pi_1,\pi_2$ 是局部同胚的，如记 $\pi_1(a)=\pi_2(b)=x\in X$，则必存在 $a$ 的一个邻域 $U\subset\mathscr{F}$ 和 $b$ 的一个邻域 $V\subset\mathscr{Y}$，满足 $\eta(U)\subset V$（由 $\eta$ 的连续性），同时 $U,V$ 分别在 $\pi_1,\pi_2$ 和 $x$ 的局部同胚. 将

$$\pi_1=\pi_2\circ\eta$$

限制在 $U$ 上，由此 $\eta(U)\subset V,\pi_1,\pi_2$ 是同胚的，所以

$$\eta=\pi_2^{-1}\circ\pi_1$$

是局部同胚的.

**定义 6.1.6**（子层） 设 $\mathscr{F}\xrightarrow{\pi}X$ 是 $X$ 上的层，$\mathscr{F}_1$ 是 $\mathscr{F}$ 的子集，满足

(1) $\mathscr{F}_1$ 是 $\mathscr{F}$ 的开集，

(2) 对 $\forall\ x\in X,\mathscr{F}_1\cap\pi^{-1}(x)$ 是 $\pi^{-1}(x)$ 的一个子群，则 $\mathscr{F}_1$ 称为 $\mathscr{F}$ 的**子层**.

子层 $\mathscr{F}_1$ 也是 $X$ 上的层，$\mathscr{F}_1$ 的拓扑由 $F$ 的拓扑诱导而来，其映射为 $\pi$ 在 $\mathscr{F}_1$ 上的限制，即 $\mathscr{F}$ 的子层 $\mathscr{F}_1$ 为层 $(\mathscr{F}_1,\pi|\mathscr{F}_1,X)$.

**定理 6.1.4** 设 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{Y}$ 是 $X$ 上的层同态，则 $\mathrm{Ker}\eta$ 和 $\mathrm{Im}\eta$ 分别是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的子层.

**证明** (1) 验证 $\mathrm{Ker}\eta$ 是 $\mathscr{F}$ 的子层

$i)\ \pi_1(\mathrm{Ker}\eta)=\pi_2\circ\eta(\mathrm{Ker}\eta)=\pi_2(O_{\mathscr{Y}})=X.$

$ii)$ $\mathrm{Ker}\eta$ 是 $\mathscr{F}$ 的开子集：类为 $\mathrm{Ker}\eta=\eta^{-1}(O_{\mathscr{Y}})$，而根据引理 6.1.1，层中任一零元素的局部都是零，因此 $O_{\mathscr{Y}}$ 是 $\mathscr{Y}$ 的开集，再由 $\eta$ 的连续性，可知 $\eta^{-1}(O_{\mathscr{Y}})=\mathrm{Ker}\eta$ 是 $\mathscr{F}$ 的开集.

$iii)$ 因为 $\eta$ 限制在每一 $\pi^{-1}(x)$ 上是同态，故对 $\forall\ x\in X$，$(\mathrm{Ker}\eta)\cap\mathscr{F}_x=(\mathrm{Ker}\eta)\cap\pi^{-1}(x)$ 显然是 $\pi^{-1}(x)$ 的子群.

其它的成层条件都是明显的.

(2) 验证 $\mathrm{Im}\eta$ 是 $\mathscr{Y}$ 的子层

$i)\pi_2(\mathrm{Im}\eta) = \pi_2(\eta(\mathscr{F})) = \pi_2 \circ \eta(\mathscr{F})$

$= \pi_1(\mathscr{F}) = X.$

$ii)$ 因为 $\mathscr{F}$ 本身是开集，根据定理 6.1.3，$\eta$ 是局部同胚的，因此 $\mathrm{Im}\eta = \eta(\mathscr{F}) \subset \mathscr{Y}$ 是开集.

$iii)$ 因为 $\eta$ 是同态，所以对 $\forall\ x \in X$，$(\mathrm{Im}\eta)_x = \eta(\mathscr{F}_x)$ 显然是 $\mathscr{Y}_x$ 中的子群.

其它的成层条件都是明显的.□

**定义 6.1.7**（商层） 设 $\mathscr{F} \xrightarrow{\pi} X$ 是层，$S$ 是 $\mathscr{F}$ 的子层，按子层定义对 $\forall\ _x \in X$，$S_x$ 是 $\mathscr{F}_x$ 的子群. 因为 Abel 群的任何子群都是正规的，因此 $\mathscr{F}_x/S_x$ 是商群. 令

$$\mathscr{F}/S := \bigcup_{x\in X} \mathscr{F}_x/S_x,$$

对 $\mathscr{F}/S$ 赋以商拓扑，并定义 $\pi:\mathscr{F}/S \to X, \pi(\mathscr{F}_x/S_x) = x$，则 $(\mathscr{F}/S,\pi,X)$ 也是 $X$ 上的层，称为层 $\mathscr{F}$ 对其子层 $S$ 的**商层**，常记为 $\mathscr{F}/S$.

所谓商拓扑是，如以 $p:\mathscr{F} \to \mathscr{F}/S, p_x = p|_{\mathscr{F}_x}:\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_X/s_X$ 表示自然投影，则 $V \subset \mathscr{F}/S$ 是开集当且仅当 $p^{-1}(V)$ 是 $\mathscr{F}$ 中的开集，这种定义本身就表明 $p$ 是连续的，因此

$$p:\mathscr{F} \to \mathscr{F}/S$$

是层同态.

**例 6.1.3** 设 $X$ 是复流形，$\theta$ 是 $X$ 上全纯函数的芽层，任取 $x_0 \in x$；令

$$S = \{X\ \text{上全纯，但满足}\ f(x_0) = 0\ \text{的函数的芽层}\},$$

这时

$$S_x = \begin{cases} \theta_x, \text{当}\ x \neq x_0 \\ \text{在}\ x_0\ \text{全纯并取值}\ O\ \text{的函数的芽，当}\ x = x_0. \end{cases}$$

$S$ 显然是 $\theta$ 的子层.

由上面的定义，$\theta_x/S_x = 0, \forall\ x \neq x_0$，当 $x = x_0$ 时，因为 $[f - f(x_0)]|_{x_0}$，所以任何 $f = \in \theta_{x_0}$，都等于 $f(x_0)$，所以 $\theta_{x_0}/S_{x_0} \cong C$，因此

$$\theta/S = \begin{cases} 0, x \neq x_0, \\ C, x = x_0. \end{cases}$$

这个商层有的称为"摩天大厦"层.

**定义 6.1.8** （正合序列）$X$ 上层的同态序列

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{Y} \xrightarrow{\mu} \mathscr{H}$$

称为在 $\mathscr{Y}$ 处正合，如果 $\mathrm{Im}\lambda = \mathrm{Ker}\mu$（由定理 6.1.4 两者都是 $\mathscr{Y}$ 的子层）.

如果层的同态序列

(6.1.1) $$\mathscr{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \to \mathscr{F}_i \xrightarrow{d_i} \mathscr{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots\cdots$$

在每个 $\mathscr{F}_i$ 处都是正合的，则称序列(6.1.1) 为层的正合序列.

最常用的层正合序列是下列层的短正合序列

(6.1.2) $$O \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to O$$

这里 $O$ 表示 $O$ 层，即对 $x \in X, \pi^{-1}(x)$ 只由一个 $O$ 元素所构成的平凡层. 按定义，因为(6.1.2) 是层的正合序列，因此 $\lambda$ 是单的，即 $\mathrm{Ker}\lambda = 0$，所以 $\lambda$ 是 $1-1$ 映射；$\mu$ 必须是满的，即 $\mu(\mathscr{F}) = \mathscr{F}_2$；同时有 $\mathrm{Im}\lambda = \mathrm{Ker}\mu$.

**例 6.1.4.** 以 $Z$ 表复流形 $X$ 上由整数构成的层，$\theta$ 表示 $X$ 上全纯函数的芽层，$\theta^*$ 表处处不为零（在每点邻域中）的全纯函数的芽层（注意 $\theta^*$ 的群结构是通常的乘法），则

(6.3.1) $O \to Z \xrightarrow{i} \theta \xrightarrow{\lambda = \exp 2\pi\sqrt{-1}} \theta^* \to O$ 是正合序列. 其中同态映射 $i$ 为包含映射，$\exp 2\pi\sqrt{-1}$ 定义为，如 $\underline{f}_x \in \theta_x$，则

$$\lambda = \exp 2\pi\sqrt{-1} : \underline{f}_x \to (\exp 2\pi\sqrt{-1} f)_x.$$

**证明** 要证明(6.1.3) 是一个层正合序列，只要证明 $\mathrm{Ker} i = 0, \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(\lambda)$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda) = \theta^*$.

$\mathrm{Ker} i = 0$ 是显然的；又我们有 $\mathrm{Ker}(\lambda) = \ker(\exp 2\pi\sqrt{-1}) =$

$\{\underline{f} | e^{2\pi i f} = 1\} = \{Z\} = \mathrm{Im} i$；所以主要需验证的是最后一个式子. 为此任取$\underline{f}_x \in \theta_x^*$，$f_x$是某一在$x$的邻域不为零的全纯函数的芽，因它不为零，所以$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_x$存在，并且在$x$的邻域全纯，它定义$\theta_x$中的一个芽，显然有$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_2 \xrightarrow{\exp 2\pi i} f_x$，因而同态$\lambda = \exp\pi\sqrt{-1}$是满的，即$\mathrm{Im}(\lambda) = \theta^*$，证毕. □

**定理 6.1.5** 如果$\mathscr{F}_1$是$\mathscr{F}$的子层，那末

(6.1.4) $O \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{i} \mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{F}/\mathscr{F}_1 \to O$是层的正合序列，其中同态$i$是包含映射，$p$是自然投影.

**证明** 在$\mathscr{F}_1$处正合：$\mathrm{Ker}(i) = 0$，因为$i$是包含映射，这是显然的. 在$\mathscr{F}$处正合：$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(i) = \mathscr{F}_1$，这是因为如$f \in \mathrm{Ker}(p)$，则$p(f) = 0$（$\mathscr{F}/\mathscr{F}_1$中的零元素），故$f \in \mathscr{F}_1$. 在$\mathscr{F}/\mathscr{F}_1$处正合：$\mathrm{Im}(p) = \mathscr{F}/\mathscr{F}_1$，即$p$是满射，这由自然投影射$p$的定义立知. □

### 6.1.3 予层

**定义 6.1.9**（予层） 设$X$是一个拓扑空间，$\mathscr{U}_X$表示$X$的所有开集所成的族，对每个$U \in \mathscr{U}_X$对应有一个Abel群$\mathscr{F}(U)$，且对于两个$U, V \in \mathscr{U}_X$，如果$U \supset V$，则有一个Abel群同态$\rho_{U,V}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$. 若$(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{U \in \mathscr{U}_X}$满足相容条件：

*i*) 对任意的$U, V, W \in \mathscr{U}_X$，且有$U \supset V \supset W$，则有

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV},$$

那么$(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{U \in \mathscr{U}_X}$称为拓扑空间$X$上的一个**予层**(prexheaf).

如果一个予层又满足以下二个条件：

ii) 如$U$，$(U_i)_{i \in I}$都是$X$的开集，而且$U = \bigcup_{i \in I} U_i$，如果$f, g \in \mathscr{F}(U)$且对$\forall\ i \in I$有$\rho_{UU_i}(f) = \rho_{UU_i}(g)$，则$f = g$.

iii) 如$U$，$(U_i)_{i \in I}$都是$X$的开集，而且$U = \bigcup_{i \in I} U_i$，如对每个$i \in I$，

有一个 $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ 且适合

$$\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_i U_j}(f_j)$$

对 $\forall\, i, j \in I$ 与 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. 则一定存在一个 $f \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $\rho_{UU_i}(f) = f_i$;对所有的 $i \in I$.

这样的予层$(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{u \in \mathscr{U}_X}$就称为拓扑空间 X 上的一个**完备予层**.

**例 6.1.5** $X = R^n$ 是 $n$ 维欧氏空间,$\mathscr{U}_X$ 是 $R^n$ 中所有开集之族,对 $R^n$ 中任一开集 $U$,$\mathscr{F}(U)$ 是 $U$ 上 $C^\infty$ 函数全体,对函数的点加法 $\mathscr{F}(U)$ 成为一个 Abel 群. 对 $R^n$ 的两个开集 $U, V$,且 $U \supset V$,则 $\rho_{U,V}$ 就是将 $U$ 上的 $C^\infty$ 函数限制在 $V$ 上的限制映射,显然 $\rho_{U,V}$ 是 $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(V)$ 的一个 Abel 群同态. 容易验证这样的$(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{U \in \mathscr{U}_X}$ 满足定义 6.1.9 中的 i)、ii)、iii) 三个条件,因此它是 $X = R^n$ 上的一个完备予层.

**定义 6.1.10**(直接极限) $S = \{a, b, c, \cdots\}$ 称为一个有向集,如果在 $S$ 上有一个自反,传递关系 $\prec$ (即 $a \prec a; a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$),使对 $\forall\, a, b \in S$,必 $\exists\, c \in S$ 使 $c \prec a$ 和 $c \prec b$(注意有向集的定义中并不要任何二个元素 $a, b$ 之间必有 $a \prec b$ 或 $b \prec a$ 的关系). $\{(G_a)_{a \in S}, \prec, \rho_{ba}\}$ 称为**有向集 S 上的 *Abel* 群系**,如果 $G_a$ 都是 Abel 群,对 $a \prec b$ 有群同态 $\rho_{ba}: G_b \to G_a$,而且它们满足

$$\begin{cases} \rho_{aa} = \text{恒等映射} \\ \rho_{ba} \circ \rho_{cb} = \rho_{ca}, \text{当 } a \prec b \prec c. \end{cases} \tag{6.1.5}$$

在有向集 $S$ 上的 *Abel* 群系内可引进一个关系:如 $x_b \in G_b, x_c \in G_c$, $x_b \sim x_c \Leftrightarrow \exists\, a \in S$ 且 $a \prec b$ 和 $a \prec c$,使得

$$\rho_{ba}(x_b) = \rho_{ca}(x_c).$$

这样引进的 $\sim$ 关系是一个等价关系,而且等价类的集合中有一个自然的 Abel 群结构(伍鸿熙、吕以辇、陈志华[1981] 附录二).

现用 $G$ 记这个等价类集,表示为

$$G = \varinjlim_{\alpha \in s} G_\alpha,$$

称 $G$ 为 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in s}$ 的**直接极限**.

层和完备予层有明显的同构关系:通过直接极限可以从完备予层过渡到层,反之可以通过层的截影得到完备予层.下面说明这个同构关系

1°.完备予层 ⇒ 层

从一个完备予层可以唯一地定义 $X$ 上的一个层结构,其方法如下:

设 $(\mathscr{F}(U), \rho_{u,v})_{U \in \mathscr{U}_X}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个予层,对 $\forall\, x \in X \mathscr{U}_x$ 表示 $x$ 的开邻域全体,$\mathscr{U}_x$ 对于集合的包含关系来讲成为一个有向集(即如果 $U, V \in \mathscr{U}_x, V \subset U$ 就认为 $V \prec U$,则 $\forall\, U, V \in \mathscr{U}_x$, $\exists\, W \in \mathscr{U}_x$,使 $W \subset U$ 和 $W \subset V$,这个 $W$ 的存在是显然的,最简单的取 $W = U \cap V$ 就可以了;这就表示 $\exists\, W \in \mathscr{U}_x$,使 $W \prec U$ 和 $W \prec V$),而且 $\rho_{UV}$ 满足 i),所以 $\{(\mathscr{F}(U))_{U \in \mathscr{U}_x}, \prec \rho_{UV}\}$ 是有向集 $\mathscr{U}_x$ 上的一个 Abel 群系,因此可按定义 6.1.10 所说的方法在 $\bigcup_{U \in \mathscr{U}_x} \mathscr{F}(U)$(或 $(\mathscr{F}(U))_{U \in \mathscr{U}_x}$)上引进一个等价关系,即对 $\forall\, f \in \mathscr{F}(U)$ 和 $g \in \mathscr{F}(V)$,如果 $\exists\, W \subset U \cap V \in \mathscr{U}_x$,使

$$\rho_{WU}(f) = \rho_{WV}(g),$$

就是说 $f \sim g$. 这个 $\sim$ 是一个等价关系,记 $\bigcup_{U \in \mathscr{U}_X} \mathscr{F}(U)$ 按这个等价关系所得的等价类的集合为 $\mathscr{F}_x$,则

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \in U_x} \mathscr{F}(U) \tag{6.1.6}$$

这个 $\mathscr{F}_x$ 有一个自然的 Abel 群结构.设 $\underline{f_x}, \underline{g_x} \in \mathscr{F}_x$,它们都是某个等价类,$f \in \mathscr{F}(U)$ 与 $g \in \mathscr{F}(V)$ 为 $\underline{f_x}, \underline{g_x}$ 的代表元素.假定 $W \subset U \cap V$,则 $\underline{f_x} + \underline{g_x}$ 定义为 $\rho_{UW}(f) + \rho_{VW}(g)$ 所代表的等价类,它不依赖于代表元素的选取.设 $\tilde{f} \in \mathscr{F}(\tilde{U}), \tilde{g} \in \mathscr{F}(\tilde{V})$ 分别为 $\underline{f_x}, \underline{g_x}$ 的另一

个代表元素，则对于 $U_1 \subset U \subset \tilde{U}$，有 $\rho_{UU_1}(f) = \rho_{\tilde{U}U_1}(\tilde{f})$，对于 $V_1 \subset V \cap \tilde{V}$ 有 $\rho_{VV_1}(g) = \rho_{\tilde{V}V_1}(\tilde{g})$. 于是设 $\tilde{w} \subset U_1 \cap V_1$，则 $\underline{f_x} + \underline{g_x}$ 又定义为

$$\rho_{U_1\tilde{W}}(\rho_{U_1\tilde{U}}(\tilde{f})) + \rho_{V_1\tilde{W}}(\rho_{\tilde{V}V_1}(\tilde{g}))$$

所代表的等价类. 但对于 $W_1 \subset W \cap \tilde{W}$，我们有

$$\begin{aligned}&\rho_{\tilde{W}W_1}[\rho_{U_1\tilde{W}}(\rho_{\tilde{U}U_1}(\tilde{f})) + \rho_{V_1\tilde{W}}(\rho_{\tilde{V}V_1}(\tilde{g}))]\\&= \rho_{\tilde{W}W_1}[\rho_{U_1\tilde{W}}(\rho_{UU_1}(f)) + \rho_{V_1\tilde{W}}(\rho_{VV_1}(g))]\\&= \rho_{UW_1}(f) + \rho_{VW_1}(g) = \rho_{WW_1}[\rho_{UW}(f) + \rho_{VW}(g)].\end{aligned}$$

所以

$$\rho_{U_1\tilde{W}}(\rho_{\tilde{U}U_1}(\tilde{f})) + \rho_{V_1\tilde{W}}(\rho_{\tilde{V}V_1}(\tilde{g}) \sim \rho_{UW}(f) + \rho_{VW}(g).$$

在 $\mathscr{F} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{F}_x$ 上可仿照 $\theta, \mathscr{E}$ 引进拓扑如下：注意到 $f \in \mathscr{F}(U), U \in \mathscr{U}_x$ 在决定 $\mathscr{F}_x$ 中的一个等价类的同时，也对每个 y $\in U \in \mathscr{U}_y$，决定了 $\mathscr{F}_y$ 中的一个等价类，于是我们将

(6,1,7) $\qquad \{f_y \mid \forall\, y \in U\}, f \in \mathscr{F}(U)$

就作为 $\mathscr{F}$ 中的一个开集，当 $U$ 取遍 $X$ 中的所有开集，$f$ 取遍 $\mathscr{F}(U)$ 中所有元素，就得到 $\mathscr{F}$ 的拓扑.

再定义 $\pi: \mathscr{F} \to X$ 为 $\pi(\mathscr{F}_x) = x$. 这样的 $\pi$ 自然是局部同胚. 这样 $(\mathscr{F}, \pi, X)$ 就是定义 6.1.1 所定义的层了.

2°. 层 ⇒ 完备予层

设 $(\mathscr{F}, \pi, X)$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个 *Abel* 群层，以 $\mathscr{U}_X$ 表示 $X$ 上的开集全体，那末对 $\forall\, U \in \mathscr{U}_X$，$U$ 上的截影全体 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 显然成一 Abel 群，定义 $\rho_{WU}: \Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma\rho(W, \mathscr{F})$ 为限制映射，则对任一 $S \in \Gamma(U, F)$，$\rho_{WV}(S): S1_W$. 容易验证，$(\Gamma(U, \mathscr{F}), \rho_{UW})_{U \in \mathscr{U}_X}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个完备予层. 这个完备予层又称为层 $\mathscr{F}$ 的**截影完备予层**，常记为 $\hat{\mathscr{F}}$.

因为层和予层是互相等价的，所以有些书的讲法在次序上不尽相同，有的书先定义予层再通过完备予层定义层，把予层称为层，把层称为完备予层的相伴空间(例如伍鸿熙，吕以辇、陈志华

[1981] 附录二)

## § 6.2 系数在一层内的上同调群

在拓扑空间上定义取值于层的上同调群的方法有 Alexander — Spanier, de Rham, Grothendick 和 Čech 等好几种方法，不过这些上同调理论都是同构的. 本节介绍 Grothendick 的上同调理论，§ 6.23 再介绍 Čech 的上同调理论和说明它们同构的 Leray 定理.

### 6.2.1 松软层和松软分解

考虑拓扑空间 $X$ 上一个层的短正合序列

(6.2.1) $0 \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to 0$

由于序列(6.2.1)是正合的，所以 $\mathrm{Ker}\lambda = 0$，即 $\lambda$ 是单一同态，因而 $\mathscr{F}_1$ 可以看成和 $\mathrm{Im}\lambda = \lambda(\mathscr{F})$ 一样是 $\mathscr{F}$ 的一个子层；此外还有 $\mathrm{Im}\lambda = \lambda(\mathscr{F}_1) = \mathrm{Ker}\mu$，$\mu$ 是满的，所以

(6.2.2) $\mathscr{F}_2 \cong \mathscr{F}/\mathrm{Ker}\mu \cong \mathscr{F}/\mathscr{F}_1$,

即 $\mathscr{F}_2$ 可以看成 $\mathscr{F}$ 对 $\mathscr{F}_1$ 的商层.

任取 $X$ 上的一个开集 $U$，序列(6.2.1)自然地诱导出 $U$ 上截影间的一个同态序列

(6.2.3) $0 \to \Gamma(U, \mathscr{F}_1) \xrightarrow{\lambda^*} \Gamma(U, \mathscr{F}) \xrightarrow{\mu^*} \Gamma(U, \mathscr{F}_2)$.

**定理 6.2.1** 如果序列(6.2.1)是正合的，那末同态序列(6.2.3)是正合的.

**证明** 先说明映射 $\lambda^*$ 的意义：设 $f \in \Gamma(U, \mathscr{F}_1)$，则定义 $\lambda^* f := \lambda \circ f \in \Gamma(U, \mathscr{F})$，$\mu^*$ 的定义类似. 由这个定义就可看出 $\lambda^*$ 是单的：因为对 $\forall\, x \in U$，$\lambda^* f = 0 \Rightarrow \lambda(f_x) = 0_x \in \mathscr{F}_x$，但 $\lambda$ 是单的，故 $f_x = 0_x \in (\mathscr{F}_1)_x$，即 $f = 0 \in \Gamma(U, \mathscr{F}_1)$.

再证 $\mathrm{Im}\lambda^* = \mathrm{Ker}\mu^*$. 首先 $\mathrm{Im}\lambda^* \subset \mathrm{Ker}\mu^*$ 是明显的，所以只要

证 $\mathrm{Ker}\mu^* \subset \mathrm{Im}\lambda^*$，为此任取 $g \in \mathrm{Ker}\mu^*$，即对 $\forall\ x \in U$，有 $\mu g_x = O_x \in (\mathscr{F}_2)_x$，由(6.2.1)的正合性，$\exists\ f_x \in (\mathscr{F}_1)_x$，使 $\lambda f_x = g_x$，但 $\lambda$ 是层同态，是局部同胚的，因而存在 $x$ 的一个邻域 $U_x \subset U$，使 $\lambda f|_{U_x} = g|_{U_x}$，对另一点 $y \in U$，同样 $\exists\ f_y \in (\mathscr{F}_1)_y$ 和 $y$ 的一个邻域 $V_y \subset U$ 使 $\lambda f'|_{V_y} = g|_{V_y}$，如果 $U_x \cap U_y \neq 0$，那末就有 $\lambda(f - f')|_{U_x \cap U_y} = 0$，所以在 $U_x \cap V_y$ 上有 $f = f'$，因此 $f$ 能拓展成为整个 $\Gamma(U,\mathscr{F}_1)$ 中的元素. □

**值得注意的是**，虽然在序列(6.2.1)是正合的条件下可以推出序列(6.2.3)也是正合的，但一般不能得出.

(6.2.4) $\quad 0 \to \Gamma(U,\mathscr{F}_1) \xrightarrow{\lambda^*} \Gamma(U,\mathscr{F}) \xrightarrow{\mu^*} \Gamma(U,\mathscr{F}_2) \to 0$

是正合序列的结论，主要原因是一般来说，$\mu^*$ 不是满的，这是因为序列(6.2.1)中的层同态 $\lambda$ 和 $\mu$ 只是局部的性质，具体来说(6.2.1)中的

(6.2.5) $$\mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to 0$$

只是一个局部的性质，而

(6.2.6) $$\Gamma(U,\mathscr{F}) \xrightarrow{\mu^*} \Gamma(U,\mathscr{F}_2) \to 0$$

却是一个整体的性质，它要求每一 $g \in \Gamma(U,\mathscr{F}_2)$ 都是一个 $U$ 上 $\mathscr{F}$ 的连续截影在映射 $\mu$ 下的象. 从(6.2.5)只能推出(6.2.6)在局部是对的，但局部不一定能拓展成为整体的结论.

本段末了我们要构造的上同调群正好就是序列(6.2.4)非正合程度的一种度量.

**例 6.2.1** 已知有层的正合序列(见例 6.1.4)

$$(*) \quad 0 \to Z \to \theta \xrightarrow{\exp 2\pi i} \theta^* \to 0.$$

现取 $U$ 为复平面上的环

$$U = \{z \in C^1 \mid 1 < |z| < 2\},$$

则由层的正合序列(∗)诱导出的 $U$ 上的截影序列

(∗∗) $\quad 0 \to \Gamma(U,Z) \to \Gamma(U,\theta) \to \Gamma(U,\theta^*) \to 0$ 在最后位置不是

正合的，例如，取 $z \in \Gamma(U,\theta^*)$，如果可以找到单值全纯函数 $f \in \Gamma(U,\theta) = A(U)$（见定理 6.1.2），使 $\exp 2\pi i f = z$，则

$$f = \frac{1}{2\pi i}\log z,$$

就将在 $1 < |z| < 2$ 中全纯，这是不可能的.

下面我们拓广层的概念，即引进所谓**松软层**(flabby Sheaf)，使得序列(6.2.4) 在松软层的意义下是正合的. 首先我们有

**定义 6.2.1** 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个层，如果对每一开集 $U \subset X$，都有

(6.2.7) $\Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{d} \Gamma(U,\mathscr{F}) \to 0$

是正合，这里 $d$ 是限制映射，则称 $\mathscr{F}$ 为**松软层**(flabby sheaf).

(6.2.7) 表示 $U$ 上的每个截影都是 $X$ 上某个截影在 $U$ 上的限制，或者说，$U$ 上的每个截影都可以扩充为 $X$ 上的一个截影. 由全纯函数的性质可知，全纯函数的芽层不是松软层，但 $C^n$ 上任意函数的芽层却显然是松软层. 从这一事实启发我们得到下面的（参考层的连续截影的定义 6.1.3）

**定义 6.2.2** 设 $\mathscr{F} \xrightarrow{\pi} X$ 是一层，$U$ 是 $X$ 中的一个开子集，映射 $S: U \to \mathscr{F}$ 称为 $U$ 上的**不连续截影**，如果

(1) $S$ 不一定是连续的，

(2) $\forall x \in U, \pi \circ s(x) = x$.

用 $C(\mathscr{F})$ 表示 $\mathscr{F}$ 的所有不连续截影的芽生成的层，显然 **$C(\mathscr{F})$ 是松软层.**

**层的松软分解或 Grothendicd 分解** 根据6.1.3段所说层和子层的关系，层 $\mathscr{F}$ 可以看成是所有取值于 $\mathscr{F}$ 的连续截影的芽构成的层，因而**层 $\mathscr{F}$ 可看成层 $C(\mathscr{F})$ 的子层**. 记商层 $\mathscr{F}^1 = C(\mathscr{F})/\mathscr{F}$，由定理 6.1.5，我们有层的正合序列

(6.2.8) $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{i} C(\mathscr{F}) \xrightarrow{p} \mathscr{F}^1 \to 0.$

其中 $i$ 是包含映射，$p$ 是自然投影.

对 $\mathscr{F}^1$ 继续同样的步骤，令 $C^1(\mathscr{F}) = C(\mathscr{F}^1), \mathscr{F}^2 = C(\mathscr{F}^1)/\mathscr{F}^1$，一般地，令

$$C^k(\mathscr{F}) = C(\mathscr{F}^k), \mathscr{F}^{k+1} = C^k(\mathscr{F})/\mathscr{F}^k, k \geqslant 0.$$

在此 $\mathscr{F}^0 = \mathscr{F}, C^0 = C$.

对 $\forall\ k \geqslant 0$，我们有正合序列

$$0 \to \mathscr{F}^k \xrightarrow{i_k} C^k(\mathscr{F}) \xrightarrow{p_k} \mathscr{F}^{k+1} \to 0$$

$$0 \to \mathscr{F}^{k+1} \xrightarrow{i_{k+1}} C^{k+1}(\mathscr{F}) \xrightarrow{p_{k+1}} \mathscr{F}^{k+2} \to 0.$$

令 $d_k = i_{k+1} \circ p_k$，则

$$\mathrm{Im} i_k = \mathrm{Ker} p_k = \mathrm{Ker}(i_{k+1} \circ p_k) = \mathrm{Ker} d_k,$$

所以

$$0 \to \mathscr{F}^k \xrightarrow{i_k} C^k(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_k} C^{k+1}(\mathscr{F}) \xrightarrow{p_{k+1}} \mathscr{F}^{k+2} \to 0$$

是正合的从头开始，这样一直下去就得到长正合序列：

(6.2.9) $\quad 0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{i} C^0(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_2} \cdots$

或简写为

(6.2.10) $\quad 0 \to \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F})$

(6.2.9) 或(6.2.10) 称为层 $F$ 的**软松分解**或 **Grothendick 分解**.

引进松软层的主要目的是使序列(6.2.4) 是正合的，这就是下面的

**定理 6.2.2** 若 $0 \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to 0$ 是拓扑空间 $X$ 上的层正合序列，并且 $\mathscr{F}_1$ 是松软层，则截影序列

(6.2.11) $\quad 0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}_1) \xrightarrow{\lambda^*} \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\mu^*} \Gamma(X, \mathscr{F}_2) \to 0$

也是正合的.

**证明** 前面已经说过，除了 $\mu^*$ 是满射外其余都没有问题. 下面我们证明在定理的条件下 $\mu^*$ 是满射.

任取 $S_2 \in \Gamma(X, \mathscr{F}_2)$，由于 $\mu: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2$ 是满的，$\mu$ 又是局部同胚的，所以对任意取定的 $x_0 \in X$，存在 $x_0$ 的一个邻域 $U_{x_0}$ 及 $S \in$

$\Gamma(U_{x_0},\mathscr{F})$ 使 $\mu_* s = \mu s = s_2|_{U_{x_0}}$,我们的目的是将 $S$ 延拓成整个 $X$ 上的截影,使它仍然满足 $\mu^* s = s_2$.

如果 $S$ 不能延拓至整个 $X$,就设 $G$ 是 $S$ 的最大可能延拓域;于是 $G \subset X$ 但 $G \neq X$,任取 $x \in \partial G, x \in X$.

和上面所说的道理一样,存在 $x$ 的邻域 $V$ 及一个 $h \in \Gamma(V,\mathscr{F})$,使 $\mu h = S_2|_V$,于是 $\mu(s-h)|_{G\cap V} = 0$,但因 $\mathrm{Ker}\mu^* = \mathrm{Im}\lambda^*$,所以存在 $S_1 \in \Gamma(G \cap V,\mathscr{F}_1)$,使

(6.2.12) $$(s-h)|_{G\cap V} = \lambda S_1.$$

因为 $\mathscr{F}_1$ 是松软的,$S_1$ 可以连续延拓到整个 $X$,即 $\exists\ \widetilde{S}_1 \in \Gamma(X,\mathscr{F}_1)$ 使 $\widetilde{S}_1|_{G\cap V} = S_1$,但 $\lambda(\widetilde{S}_1|_V) + h \in \Gamma(V,\mathscr{F})$,所以(6.2.12)可以写成

$$(\lambda\widetilde{S}_1|_V + h)|_{G\cap V} = S|_{G\cap V},$$

所以
$$\begin{cases} S, & x \in G, \\ \lambda\widetilde{S}_1 + h, & x \in V \end{cases}$$

就定义 $\Gamma(G \cup V,\mathscr{F})$ 的一个元素 $\widetilde{S}$,满足 $\mu\widetilde{S} = S_2|_{G\cup V}$,这和 $G$ 是 $S$ 的最大可能延拓域矛盾. 定理证毕. □

(参考 H. Grauert & K. Fritsche[1976] 第六章定理 1.9)

**推论 6.2.1** 如果 $0 \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to 0$ 是层正合序列,并且 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}$ 都是松软层,则 $\mathscr{F}_2$ 也是松软层.

证明,由于 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}$ 都是松软层,所以有下图

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(U,\mathscr{F}) \to 0 \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu^* \\ \Gamma(X,\mathscr{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(U,\mathscr{F}_2) \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 都是限制映射. 上图第一行及两列都是正合序列. 由于 $\mathscr{F}$ 是松软层,所以 $\alpha$ 是满的,由定理 6.2.2,两个 $\mu^*$ 也是满的,由此立得 $\beta$ 也是满的,即 $\mathscr{F}_2$ 也是松软层. □

**推论**　如 $\mathscr{F}$ 是松软层,则其 Grothendick 分解的各项都是松软层.

**证明**　由 Grothendick 分解的定义和推论 6.2.1 立得. □

**6.2.2　Grothendick 上同调**

任给一层($\mathscr{F}$,$\pi$,$X$),那末层 $\mathscr{F}$ 的 Grothendick 分解

$$(6.2.9)\quad 0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{i} C^0(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathscr{F}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathscr{F}) \to \cdots$$

是一个层的正合序列,它自然地诱导出一个截影群的同态序列:

$$(6.2.13)\quad 0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{i} \Gamma(X,C^0(\mathscr{F})) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X,C^1(\mathscr{F})) \xrightarrow{d_1} \Gamma(X,C^2(\mathscr{F})) \to \cdots \to \Gamma(X,C^p(\mathscr{F})) \xrightarrow{d_p} \Gamma(X,C^{p+1}(\mathscr{F})) \xrightarrow{d_{p+1}} \cdots$$

要注意它不一定是正合序列.

下面定义的上同调群就是同态序列(6.2.13)非正合性的"度量".

**定义 6.2.3**(Grothendick 上同调群)　同态序列(6.2.13)非正合性的"度量"定义为 $X$ 上取值于层 $\mathscr{F}$ 的上同调群(或称为 $X$ 上系数在层 $\mathscr{F}$ 内的上同调群),即

$$(6.2.14)\quad H^p(X,\mathscr{F}) := \frac{\mathrm{Ker}d_p}{\mathrm{Im}d_{p-1}} = \frac{\mathrm{Ker}(\Gamma(X,C^p(\mathscr{F})) \to \Gamma(X,C^{p+1}(\mathscr{F})))}{\mathrm{Im}(\Gamma(X,C^{p-1}(\mathscr{F})) \to \Gamma(X,C^p(\mathscr{F})))}. \qquad p \geqslant 0.$$

当 $p=0$ 时,定义 $C^{-1}(\mathscr{F}) \equiv 0, d_{-1} \equiv 0$.

注意,当 $p=0$ 时,$H^0(X,\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}d_0$,但由于序列

$$O \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{i} \Gamma(X,C^0(\mathscr{F})) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X,C^1(\mathscr{F}))$$

在 $\Gamma(X,C^0(\mathscr{F}))$ 处总是正合的,因此 $\mathrm{Ker}d_0 = \mathrm{Im}(i)$,但 $i$ 是包含同态,是一一的,所以有

$$(6.2.15)\quad H^0(X,\mathscr{F}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F}).$$

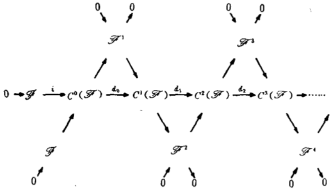
**定义 6.2.4**　拓扑空间 $X$ 上的层 $\mathscr{F}$ 称为**零调的**,如果它满足

$$H^p(X,\mathscr{F}) = 0, \forall\ p \geqslant 1.$$

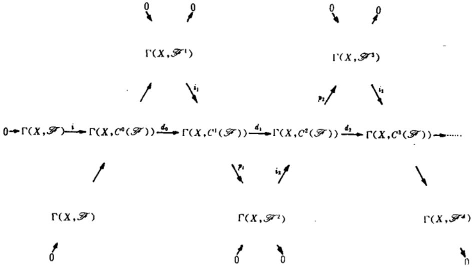
松软层的主要意义是因为它是零调层，也就是我们有

**定理 6.2.3** 松软层是零调层.

**证明** 我们考虑下列图表




其中所有的层都是松软的，根据松软分解每条斜线都是层的正合序列，它们自然地诱导出下列截影群的同态序列：



其中 $i$ 是包含同态，$p$ 是自然投影，$d_k = i_{k+1} \circ p_k$. 由定理 6.2.2，每条斜线都是正合的，现在如能证明横线序列在 $\Gamma(X, C^p(\mathscr{F}))(\forall\ p \geqslant 1)$ 处的正合性，那末就有 $H^p(X,\mathscr{F}) = 0(\forall\ p \geqslant 1)$，定理就证明了.

现以 $\Gamma(X, C^2(\mathscr{F}))$ 处为例证明其正合性，即要证 $\mathrm{Ker}d_2 = \mathrm{Im}d_1$.

因为　$\mathrm{Im}d_1 = \mathrm{Im}(i_2p_1) = \mathrm{Im}(i_2)$　（$\because p_1$ 是满射）

　　$\mathrm{Ker}d_2 = \mathrm{Ker}(i_3p_2) = \mathrm{Ker}p_2$　（$\because i_3$ 是单射）

但　$\mathrm{Im}i_2 = \mathrm{Ker}p_2$　（$\because$ 斜线正合）

所以　$\mathrm{Ker}d_2 = \mathrm{Im}d_1$.

定理证明. □

**定理 6.2.4**　设 $\varphi:\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ 是层同态，则 $\varphi$ 诱导出交换图：

$$
(6.2.16)\quad
\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{F}_1 & \longrightarrow & C(\mathscr{F}_1) & \xrightarrow{d_0} & C^1(\mathscr{F}_1) & \xrightarrow{d_1} & C^2(\mathscr{F}_1) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & \\
0 \longrightarrow & \mathscr{F}_2 & \longrightarrow & C(\mathscr{F}_2) & \longrightarrow & C^1(\mathscr{F}_2) & \longrightarrow & C^2(\mathscr{F}_2) & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

并且，如果 $O \to \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \mathscr{F}_2 \to O$ 是正合的，那末

(6.2.17)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & O & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
O \to & \mathscr{F}_1 & \to & C(\mathscr{F}_1) & \to & C^1(\mathscr{F}_1) & \to & C^2(\mathscr{F}_1) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
O \to & \mathscr{F} & \to & C(\mathscr{F}) & \to & C^1(\mathscr{F}) & \to & C^2(\mathscr{F}) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
O \to & \mathscr{F}_2 & \to & C(\mathscr{F}_2) & \to & C^1(\mathscr{F}_2) & \to & C^2(\mathscr{F}_2) & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

每行每列都是正合的.

**证明** 1° **(6.2.16)的证明** 从$\varphi$到$\varphi_0$的诱导的含意是：因为$C(\mathscr{F}_1)$是$\mathscr{F}_1$的不连续截影的芽层，因此如将任何一个取值$\mathscr{F}_1$的局部不连续截影$f_1$的芽记作$[f_1]$，则可定义$\varphi_0[f_1]:=[\varphi f_1]$，后者已是取值于$\mathscr{F}_2$的不连续截影的芽，因此有$\varphi_0:C(\mathscr{F}_1)\to C(\mathscr{F}_2)$. 这样定义的$\varphi_0$显然将连续截影映为连续截影，因此它诱导

$$\widetilde{\varphi}_1:\mathscr{F}_1^1=C(\mathscr{F}_1)/\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2^1=C(\mathscr{F}_2)/\mathscr{F}_2,$$

于是得到交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{F}_1 & \to & C(\mathscr{F}_1) & \to & \mathscr{F}_1^1 & \to & 0 \\ & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi_0 & & \downarrow\widetilde{\varphi}_1 & & \\ 0 & \to & \mathscr{F}_2 & \to & C(\mathscr{F}_2) & \to & \mathscr{F}_2^1 & \to & 0 \end{array}$$

同理可得

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{F}_1^n & \to & C^n(\mathscr{F}_1) & \to & \mathscr{F}_1^{n+1} & \to & 0 \\ & & \downarrow\widetilde{\varphi}_n & & \downarrow\varphi_n & & \downarrow\widetilde{\varphi}_{n+1} & & \\ 0 & \to & \mathscr{F}_2^n & \to & C^n(\mathscr{F}_2) & \to & \mathscr{F}_2^{n+1} & \to & 0 \end{array}$$

将它们拼在一起就得到(6.2.16).

2° **(6.2.17)的证明**：为简便计，以

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{F}_1 & \xrightarrow{\lambda} & \mathscr{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathscr{F}_2 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C(\mathscr{F}_1) & \xrightarrow{\lambda_0} & C(\mathscr{F}) & \xrightarrow{\mu_0} & C(\mathscr{F}_2) & \to & 0 \end{array}$$

为例，要证在$C(\mathscr{F})$处的正合性，即要证明$\mathrm{Im}\lambda_0=\mathrm{Ker}\mu_0$. $\mathrm{Im}\lambda_0\subseteq\mathrm{Ker}\mu_0$是显然的，所以只要证明$\mathrm{Ker}\mu_0\subseteq\mathrm{Im}\lambda_0$，为此任取$\mathscr{F}$的不连续截影的芽$[f]\in Ker\mu_0$，其中$f$是$\mathscr{F}$的一个局部不连续截影，因为$0=\mu_0[f]=[\mu f]$，所以在$f$的定义域的任意一点$x$，有$\mu f_x=0$，由$0\to\mathscr{F}_1\xrightarrow{\lambda}\mathscr{F}\xrightarrow{\mu}\mathscr{F}_2\to 0$的正合性，$\exists\ f_{1x}\in\mathscr{F}_{1x}$使$\lambda(f_{1x})$

$= f_z$，于是有 $\lambda_0[f_1]=[f]$，即 $\mathrm{Ker}\,\mu_0 \subseteq \mathrm{Im}\,\lambda_0$. 其它各列的证明类似，至于各行的正合性则是从 Grothendick 分解就知道的. □

设 $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2 \to 0$ 是一个层的正合序列，分别作它们的 Grothendick 分解，由定理 6.2.4，我们有交换图表(6.2.17) 而 (6.2.17) 又自然地诱导一个截影群的同态序列：

(6.2.18)

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \Gamma(X,\mathscr{F}_1) & \to & \Gamma(X,C(\mathscr{F}_1)) & \to & \Gamma(X,C^1(\mathscr{F}_1)) \to \cdots \to & & \Gamma(X,C^p(\mathscr{F}_1)) \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \Gamma(X,\mathscr{F}) & \to & \Gamma(X,C(\mathscr{F})) & \to & \Gamma(X,C^1(\mathscr{F})) \to \cdots \to & & \Gamma(X,C^p(\mathscr{F})) \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \Gamma(X,\mathscr{F}_2) & \to & \Gamma(X,C(\mathscr{F}_2)) & \to & \Gamma(X,C^1(\mathscr{F}_2)) \to \cdots \to & & \Gamma(X,C^p(\mathscr{F}_2)) \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

要注意的是(6.2.18) 是普通交换群之间的同态序列. 因为 $C^p(\mathscr{F}_1)$，$C^p(\mathscr{F})$，$C^p(\mathscr{F}_2)$ $(p \geqslant 0)$ 都是松软层，由定理 6.2.2 知道，除第一列外，各列都是正合的，但行不一定正合，其非正合程度是由各行的上同调群表征的.

为了叙述简单，我们将(6.2.18) 用下图代表

(6.2.19)

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
0 \to & A & \to & A^0 & \xrightarrow{d_0} & A^1 & \xrightarrow{d_1} & A^2 & \to \cdots \to & & A^p & \xrightarrow{d_p} & A^{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}} A^{p+2} \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
0 \to & B & \to & B^0 & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & B^1 & \xrightarrow{\tilde{d}_1} & B^2 & \to \cdots \to & & B^p & \xrightarrow{\tilde{d}_p} & B^{p+1} & \xrightarrow{\tilde{d}_{p+1}} B^{p+2} \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
0 \to & C & \to & C^0 & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_0} & C^1 & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_1} & C^2 & \to \cdots \to & & C^p & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_p} & C^{p+1} & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_{p+1}} C^{p+2} \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & 0 & & 0 & 0
\end{array}$$

其中 $A^p$，$B^p$，$C^p$ 分别代表交换群 $\Gamma(X,C^p(\mathscr{F}_1))$，$\Gamma(X,C^p(\mathscr{F}))$，$\Gamma(X,$

$C^p(\mathscr{F}_2)$);同调群

$$H^p(A)=\frac{\mathrm{Ker}d_p}{\mathrm{Im}d_{p-1}}=\frac{\mathrm{Ker}(A^p\to A^{p+1})}{\mathrm{Im}(A^{p-1}\to A^p)},$$

和 $H^p(B)$,$H^p(C)$ 分别代表同调群 $H^p(X,\mathscr{F}_1)$ 和 $H^p(X,\mathscr{F})$,$H^p(X,\mathscr{F}_2)$. 又当 $p\geqslant 0$ 时有 $d^{p+1}\circ d^p=0$,$\tilde{d}^{p+1}\circ\tilde{d}^p=0$ 及 $\tilde{\tilde{d}}^{p+1}\circ\tilde{\tilde{d}}^p=0$.

交换图表(6.2.19)中除了第一列外,其余各列都是正合的. 利用同调代数中的方法,可以从图表(6.2.19)自然地诱导出一个同调群间的同态序列:

$$\cdots\to H^p(A)\xrightarrow{\alpha^*}H^p(B)\xrightarrow{\beta^*}H^p(C)\xrightarrow{\delta^*}H^{p+1}(A)\to\cdots$$

其中同态映射 $\alpha^*$,$\beta^*$ 和 $\delta^*$ 的具体诱导方法如下:

$$(6.2.20)\qquad\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & A^{p-1} & \xrightarrow{d_{p-1}} & A^p & \xrightarrow{d_p} & A^{p+1} & \to \\
 & \downarrow\alpha & & \downarrow\alpha & & \downarrow\ \vdots\!\uparrow\alpha & \\
\to & B^{p-1} & \xrightarrow{\tilde{d}_{p-1}} & B^p & \xrightarrow{\tilde{d}_p} & B^{p+1} & \to \\
 & \downarrow\beta & & \downarrow\ \vdots\!\uparrow\beta & & \downarrow\beta & \\
\to & C^{p-1} & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_{p-1}} & C^p & \xrightarrow{\tilde{\tilde{d}}_p} & C^{p+1} & \to \\
 & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

(注:各行之间的同态我们都用记号 $\alpha,\beta,\delta$,不难根据实际情况加以区别)

i) 同态

$$\alpha^*:H^p(A)=\frac{\mathrm{Ker}d_p}{\mathrm{Im}d_{p-1}}\to H^p(B)=\frac{\mathrm{Ker}\tilde{d}_p}{\mathrm{Im}\tilde{d}_{p-1}}$$

的诱导定义.

只要验证 $\alpha(\mathrm{Ker}d_p)\subset\mathrm{Ker}\tilde{d}_p$ 及 $\alpha(\mathrm{Im}d_{p-1})\subset\mathrm{Im}\tilde{d}_{p-1}$) 即可. 设 $x\in\mathrm{Ker}d_p$,则 $\tilde{d}_p\alpha x=\alpha d_p x=0$,即 $\alpha x\in\mathrm{Ker}\tilde{d}_p$;再设 $x\in\mathrm{Im}d_{p-1}$,即 $x=d_{p-1}y$,$y\in A^{p-1}$,则 $\alpha x=\alpha d_{p-1}y=\tilde{d}_{p-1}\alpha y\in\mathrm{Im}\tilde{d}_{p-1}$. 所以只要定义

$\alpha^*[x] := [\alpha x]$，即可. $[\cdot]$ 表示 · 所在的同调类.

同理可得

ii) 同态

$$\beta^*: H^p(B) = \frac{\mathrm{Ker}\tilde{d}_p}{\mathrm{Im}\tilde{d}_{p-1}} \to H^p(C) = \frac{\mathrm{Ker}\,\tilde{\tilde{d}}_p}{\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{d}}_{p-1}}$$

的诱导定义.

iii) 同态

$$\delta^*: H^p(C) = \frac{\mathrm{Ker}\,\tilde{\tilde{d}}_p}{\mathrm{Ker}\,\tilde{\tilde{d}}_{p-1}} \to H^{p+1}(A) = \frac{\mathrm{Ker}d_{p+1}}{\mathrm{Im}d_p}$$

的诱导定义.

$\delta^*$ 的诱导比较复杂. 任取 $x \in \mathrm{Ker}\,\tilde{\tilde{d}}_p$，并定义 $\delta x := \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}x \in A^{p+1}$（其形象意义表示为图(6.2.20)中的"之"字过程），然后再定义 $\delta^*[x] := [\delta x]$. 现在要说明的是 $\delta$ 定义的合理性.

在 $\delta = \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}$ 的定义中，因 $\alpha$ 是单的，$\alpha^{-1}$ 自然有意义，要考虑的是 $\beta^{-1}$. 因为如 $x \in \mathrm{Ker}\tilde{\tilde{d}}_p$，则可能有 $y_1, y_2 \in B^p$，使 $y_1, y_2 \in \beta^{-1}x$，这时，$\beta(y_1 - y_2) = 0$，由 $0 \to A^p \xrightarrow{\alpha} B^p \xrightarrow{\beta} C^p \to 0$ 的正合性，可得 $y_1 - y_2 \in \alpha A^p$，因此

$$\begin{aligned}\delta x &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}x(\mathrm{mod}\alpha^{-1}\tilde{d}_p(\alpha A^p)) \\ &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}x(\mathrm{mod}\alpha^{-1}\alpha d_p A^p) \\ &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}x(\mathrm{mod}d_p A^p)\end{aligned}$$

所以$[\delta x]$不依赖于 $\beta^{-1}x$ 的选择.

其次在上述 $\delta$ 的定义下，验证 $\delta(\mathrm{Ker}\tilde{\tilde{d}}_p) \subseteq \mathrm{Ker}(d_{p+1})$. 设 $x \in \mathrm{Ker}\tilde{\tilde{d}}_p$，则由列的正合性，有 $x = \tilde{\tilde{d}}_{p+1}y, y \in C^{p-1}$，由于 $\beta$ 是满射，所以有 $y = \beta z, z \in B^{p-1}$，这时

$$\begin{aligned}d_{p+1}\delta x &= d_{p+1}\alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}\tilde{\tilde{d}}_{p-1}\beta z \\ &= d_{p+1}\alpha^{-1}\tilde{d}_p \cdot \tilde{d}_{p-1}z = 0(\because \tilde{d}_p \circ \tilde{d}_{p-1} = 0),\end{aligned}$$

此即表示 $\delta(\mathrm{Ker}\tilde{\tilde{d}}_p) \subseteq \mathrm{Ker}d_{p+1}$.

再验证 $\delta(\mathrm{Im}\tilde{\tilde{d}}_{p-1})\subseteq \mathrm{Im}d_p$. 设 $x\in \mathrm{Im}\tilde{\tilde{d}}_{p-1}$，则 $x=\tilde{\tilde{d}}_{p-1}y, y\in C^{p-1}$，由于 $\beta$ 是满 射，所以有 $y=\beta S, S\in B^{p-1}$，这时

$$\begin{aligned}\delta x &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}\tilde{\tilde{d}}_{p-1}y(\mathrm{mod}d_pA^p)\\ &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\beta^{-1}\tilde{\tilde{d}}_{p-1}\beta s(\mathrm{mod}d_pA^p)\\ &= \alpha^{-1}\tilde{d}_p\tilde{d}_{p-1}S(\mathrm{mod}d_pA^p)\\ &= 0 \qquad (\mathrm{mod}\mathrm{d}_pA^p)\end{aligned}$$

此即表示 $\delta(\mathrm{Im}\tilde{\tilde{d}}_p)\subseteq \mathrm{Im}d_p$.

至此 $\delta^*: H^p(C)\to H^{p+1}(A)$ 的诱导定义的合理性全部得到了验证.

下列定理是层与上同调理论中最重要的定理之一.

**定理 6.2.5** （上同调序列的正合性）. 由层的短正合序列 $0\to\mathscr{F}_1\xrightarrow{\alpha}\mathscr{F}\xrightarrow{\beta}\mathscr{F}_2\to 0$ 诱导出的上同调群的同态序列

$$\begin{aligned}&O\to H^0(X,\mathscr{F}_1)\to H^0(X,\mathscr{F})\to H^0(X,\mathscr{F}_2)\to H^1(X,\mathscr{F}_1)\\ &\quad\to H^1(X,\mathscr{F})\to H^1(X,\mathscr{F}_2)\to H^2(X,\mathscr{F}_1)\to\cdots\to\end{aligned}$$

(6.2.21)

$$\begin{aligned}&H^p(X,\mathscr{F}_1)\xrightarrow{\alpha^*}H^p(X,\mathscr{F})\xrightarrow{\beta^*}H^p(X,\mathscr{F}_2)\\ &\qquad\xrightarrow{\delta^*}H^{p+1}(X,\mathscr{F}_1)\to\cdots\end{aligned}$$

是正合的. (6.2.21) 这个上同调群的正合序列亦可简单地用如下三角形表示

(6.2.22)

$$\begin{array}{ccc} & H^\cdot(\Gamma(X,C^\cdot(\mathscr{F}_1))) & \\ {}^{\delta^*}\nearrow & & \searrow{}^{\alpha^*} \\ H^\cdot(\Gamma(X,C^\cdot(\mathscr{F}_2))) & \xleftarrow{\beta^*} & H^\cdot(\Gamma(X,C^\cdot(\mathscr{F}))) \end{array}$$

**证明** 我们仍然采用前面使用过的记号，这时(6.2.21)可写成

(6.2.23)

$$0 \to H^0(A) \to H^0(B) \to H^0(C) \to H^1(A) \to H^1(B)$$
$$\to H^1(C) \to H^2(A) \to \cdots \to H^p(A) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(B)$$
$$\xrightarrow{\beta^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(A) \to \cdots$$

我们以验证一般位置 $H^p(A), H^p(B), H^p(C)$ 处的正合性为例，参阅图(6.2.20).

**$\mathbf{H^p(B)}$ 处的正合性**：$\mathrm{Im}\alpha^* \subset \mathrm{Ker}\beta^*$ 是显然的，所以只要验证 $\mathrm{Ker}\beta^* \subset \mathrm{Im}\alpha^*$. 为此任取 $[x] \in \mathrm{Ker}\beta^*$，则 $\beta x = 0, [\beta x] = 0$，这时有 $\beta x = \tilde{\tilde{d}}_{p-1}, y \in C^{p-1}$. 由列的正合性，$\exists\ x' \in B^{p-1}$，使 $\beta x' = y$，因此 $\beta x = \tilde{\tilde{d}}_{p-1} y = \beta \tilde{\tilde{d}}_{p-1} x'$，所以 $x - \tilde{\tilde{d}}_{p-1} x' \in \mathrm{Ker}\beta$，故 $\exists\ x'' \in A^{p-1}$，使 $x - \tilde{\tilde{d}}_{p-1} x' = \alpha x''$. 因此有 $[x] = [\tilde{\tilde{d}}_{p-1} x' + \alpha x''] = [\alpha x''] = \alpha^* [x'']$，此即表示 $\mathrm{Ker}\beta^* \subset \mathrm{Im}\alpha^*$.

**$\mathbf{H^p(A)}$ 处的正合性**：同理可得.

**$\mathbf{H^p(C)}$ 处的正合性**：要证 $\mathrm{Ker}\delta^* = \mathrm{Im}\beta^*$.

先证 $\mathrm{Im}\beta^* \subset \mathrm{Ker}\delta^*$. 为此任取 $[x] \in \mathrm{Im}\beta^*$，这时有 $x = \beta y, y \in B^p$，但是 $y$ 可写成 $y = \tilde{d}_{p-1} x', x' \in B^{p-1}$，而 $\tilde{d}_p \circ \tilde{d}_{p-1} = 0$，所以有 $\tilde{d}_p y = 0$. 因此 $\delta x = \alpha^{-1} \tilde{d}_p \beta^{-1} x = \alpha^{-1} \tilde{d}_p \beta^{-1} \beta y = \alpha^{-1} \tilde{d}_p y = 0$，即 $\delta^* [x] = 0$. 此即表示 $\mathrm{Im}\beta^* \subset \mathrm{Ker}\delta^*$.

其次证 $\mathrm{Ker}\delta^* \subset \mathrm{Im}\beta^*$. 为此任取 $[x] \in \mathrm{Ker}\delta^*$，此即 $\delta x = 0$. 或 $\alpha^{-1} \tilde{d}_p \beta^{-1} x = 0, \tilde{d}_p \beta^{-1} x = 0$，这时有 $\beta^{-1} x = \tilde{d}_{p-1} x', x' \in B^{p-1}$（注意 $\tilde{d}_p \circ \tilde{d}_{p-1} = 0$），但是 $\tilde{d}_{p-1} x' = y, y \in B^p$，所以 $\beta^{-1} x = y$，即 $x = \beta y$，因此 $[x] = \beta^* [y]$，此即表示 $\mathrm{Ker}\delta^* \subset \mathrm{Im}\beta^*$. □

作为定理 6.2.5 的应用，我们得到下列重要结果：

**定理 6.2.6**（形式 de Rham 引理） 设 $X$ 上的层 $\mathscr{F}$ 有**零调分解**的正合序列：

(6.2.24) $\qquad 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \mathscr{L}^2 \to \cdots$

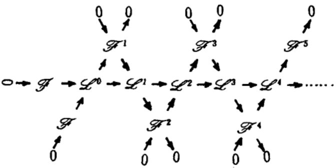
即所有的层 $\mathscr{L}^p(p \geqslant 0)$ 都是零调的，$H^i(X,\mathscr{L}^p) = 0(p \geqslant 0, i \geqslant 1)$. 那末前面由 Grothendick 分解所定义的上同调群(定义 6.2.3，(6.2.14))

(6.2.25) $\quad H^p(X,\mathscr{F}) \cong \dfrac{\mathrm{Ker}[\Gamma(X,\mathscr{L}^p) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^{p+1})]}{\mathrm{Im}[\Gamma(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^p)]}$

换句话说，取值于层 $\mathscr{F}$ 的上同调群，可以通过 $\mathscr{F}$ 的任一零调分解的截影群同态序来定义，而不一定只是用松软层的 Grothendick 分解，注意 Grothendick 分解就是当(6.2.4)中的 $\mathscr{L}^p = C^p(\mathscr{F})$ 的情况.

**证明** 如果令 $\mathscr{F}^p = \mathrm{Im}(\mathscr{L}^{p-1} \to \mathscr{L}^p) = \mathrm{Ker}(\mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^{p+1})$，注意由定理 6.1.4 它们都是 $\mathscr{L}^p$ 的子层，这时我们有下列交换图表：

(6.2.26)



因为

$$\mathscr{F}^{p+1} = \mathrm{Im}(\mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^{p+1}) \cong \mathscr{L}^p/\mathrm{Ker}(\mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^{p+1}) = \mathscr{L}^p/\mathscr{F}^p,$$

所以上表中每条斜线上的短层同态序列都是正合的. 由定理

6.2.5，每个斜线上的短正合序列都可诱导出一个长正合序列，例如从第一个斜短正合序列可诱导出下列长正合序列

(6.2.27) $$\cdots \to H^{p-1}(X,\mathscr{L}^0) \to H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1) \to H^p(X,\mathscr{F}) \to H^p(X,\mathscr{L}^0) \to \cdots$$

由 $H^{p-1}(X,\mathscr{F}^0) = H^p(X,\mathscr{L}^0) = 0. \forall\ (p-1) \geqslant 0$，得

$$H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1) \cong H^p(X,\mathscr{F}),$$

依次类推，可得

(6.2.28) $$H^p(X,\mathscr{F}) \cong H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1) \cong H^{p-2}(X,\mathscr{F}^2) \cong \cdots \cong H^1(X,\mathscr{F}^{p-1})$$

此外，由层的短正合序列

$$0 \to \mathscr{F}^{p-1} \to \mathscr{L}^{p-1} \to \mathscr{F}^p \to 0$$

又诱导出长正合序列

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}^{p-1}) \to H^0(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to H^0(X,\mathscr{F}^p) \to H^1(X,\mathscr{F}^{p-1}) \to H^1(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to \cdots$$

由 $H^1(X,\mathscr{L}^{p-1}) = 0$ 及 Grothendick 上同调群的定义 6.2.3 的注意知道：

$$H^0(X,\mathscr{F}^{p-1}) = \Gamma(X,\mathscr{F}^{p-1}),$$
$$H^0(X,\mathscr{L}^{p-1}) = \Gamma(X,\mathscr{L}^{p-1}),$$
$$H^0(X,\mathscr{F}^p) = \Gamma(X,\mathscr{F}^p),$$

于是从上面的层的长合序列得到下面的层的短正合序列.

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}^{p-1}) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to \Gamma(X,\mathscr{F}^p) \to H^1(X,\mathscr{F}^{p-1}) = 0$$

由此可知

(6.2.29) $$H^1(X,\mathscr{F}^{p-1}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F}^p)/I_m[\Gamma(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to \Gamma(X,\mathscr{F}^p)].$$

再由

(6.2.30) $$0 \to \mathscr{F}^p \to \mathscr{L}^p \to \mathscr{F}^{p+1} \to 0$$

所诱导的长正合序列

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}^p) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^p) \to$$

$$\Gamma(X,\mathscr{F}^{p+1}) \to H^1(X,\mathscr{F}^p) \to H^1(X,\mathscr{L}^p) \to \cdots$$

及 $H^1(X,\mathscr{L}^p) = 0$ 得出

$$\Gamma(X,\mathscr{F}^p) = Ker[\Gamma(X,\mathscr{L}^p) \to \Gamma(X,\mathscr{F}^{p+1})].$$

此外由(6.2.30)可知 $\Gamma(X,\mathscr{F}^p) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^p)$ 是单的，同样 $\Gamma(X,\mathscr{F}^{p+1}) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^{p+1})$ 也是单的. 由(6.2.28)又有 $H^1(X,\mathscr{F}^{p-1}) = H^p(X,\mathscr{F})$. 所以由(6.2.29)最后得到

$$H^p(Z,\mathscr{F}) \cong \frac{\mathrm{Ker}[\Gamma(X,\mathscr{L}^p) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^{p+1})]}{\mathrm{Im}[\Gamma(X,\mathscr{L}^{p-1}) \to \Gamma(X,\mathscr{L}^p)]}$$

这就是(6.2.15)，定理证明. □

## § 6.3 Čech 上同调及 Leray 定理

### 6.3.1 Čech 上同调

本段介绍层与上同调的另一种方法 Čech 上同调，这个方法比较直观，并且和通常多面体上同调群的定义极为相似.

设 $X$ 是一拓扑空间，$(\mathscr{F},\pi,X)$ 是 $X$ 上的一个层，$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 $X$ 的一个开复盖.

由 $\mathscr{U}$ 可以定义一套复形结构，$\mathscr{U}$ 中每一元素(它是 $X$ 上的一个开集)，称为零维单形，$\mathscr{U}$ 中 $q+1$ 个有序组 $(U_0,\cdots,U_q)$ 生成一个 $q$ 维单形，如果 $U_0 \cap \cdots \cap U_q \neq \varnothing$ 全体 $q$ 维单形的集合称为 $\mathscr{U}$ 的 **$q$ 维骨架**.

**定义 6.3.1** 一个以 $\mathscr{F}$ 为系数(或说取值于 $\mathscr{F}$)的 $\mathscr{U}$ 的 **$q$ 维上链**，是一个映射 $f$

$f$: 对任一 $q$ 维单形 $(U_{i0},\cdots,U_{iq})$

$\to f_{i0\cdots iq} \in \Gamma(U_{i0} \cap \cdots \cap U_{iq},\mathscr{F})$ 它关于指标 $i_0,\cdots,iq$ 是反对称的，即

$$f_{i_0\cdots i_k\cdots i_j\cdots i_q} = - f_{i_0\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_q}, \forall\ ,k,j,$$

全体 $q$ 维上链的集合记作 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$，在 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 中可以定义加法：如 $\{f_{i_0\cdots i_q}\},\{g_{i_0\cdots i_q}\}\in C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则

$\{f_{i_0\cdots i_q}\}+\{g_{i_0\cdots i_q}\}=\{f_{i_0\cdots i_q}+g_{i_0\cdots i_q}\}$ 在此加法运算下，$C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 成为一 Abel 群，称为以 $\mathscr{F}$ 为系数的 $q$ 维上链群.

在 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 之间可定义一个**上边缘算子** $\delta,\delta:C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})\to\mathscr{C}^{q+1}(\mathscr{U},\mathscr{F}),q=0,1,2,\cdots$. 其具体意义为：

对 $\forall\ f\in C^q(\mathscr{U},\mathscr{F}),(\delta f)\in C^{q+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$，$\delta f$ 在任一 $q+1$ 维单形 $(U_{i_0},\ldots,U_{i_{q+1}})$ 上的取值定义为

$$(6.3.1)\qquad (\delta f)_{i_0\cdots i_{q+1}}=\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{q+1}},$$

其中 $\hat{i}_k$ 表示 $i_k$ 不出现，$f_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{q+1}}\in\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\cdots\cap U_{i_{q+1}},\mathscr{F})$ 限制在 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q+1}$ 上是有意义的，(6.3.1) 中各项都表示限制后作为 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q+1}$ 上的截影，显然 $\delta$ 是群同态.

**定理 6.3.1** $\delta_{q+1}\circ\delta_q=0$；对所有 $q=0,1,2,\cdots$.

**证明** 对 $\forall\ f\in C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则 $\delta_{q+1}\circ\delta_q f\in C^{q+2}(\mathscr{U},\mathscr{F})$，对任一 $q+2$ 维单形 $(U_{i_0},U_{i_1},\cdots,U_{i_{q+2}})$，由定义(6.3.1)

$$(\delta_{q+1}\delta_q f)_{i_0\cdots i_{q+2}}=\sum_{k=0}^{q+2}(-1)^k(\delta_q f)\,i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{q+2}$$

$$=\sum_{k=0}^{q+2}(-1)^k\Big(\sum_{j<k}(-1)^j f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots\hat{i}_k\cdots i_{q+2}}$$

$$+\sum_{k<j}(-1)^{j+1}f_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots\hat{i}_j\cdots i_{q+2}}\Big)=\sum_{\substack{k,j=0\\k\neq j}}^{q+2}[(-1)^{k+j}+(-1)^{k+j+1}]f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots\hat{i}_k\cdots i_{q+2}}=0\cdot\square$$

**定义 6.3.2** $q$ 维上链群 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 的 $q$ 维上闭链群 $Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 和 $q$ 维上边缘链群 $B^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 分别定义为

$$(6.3.2)\qquad Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})=\mathrm{Ker}\delta=\{f\in C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})\,|\,\delta f=0\},$$

$$(6.3.3)\qquad B^q(\mathscr{U},\mathscr{F})=\mathrm{Im}\delta=\{\delta f\,|\,\forall\ f\in C^{q-1}(\mathscr{U},\mathscr{F})\}$$

显然，$Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 为 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 的子群，$B^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 为 $Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 的子群，又定义 $B^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=0$.

**定义 6.3.3** 开复盖 $\mathscr{U}$ 的以层 $\mathscr{F}$ 为系数的上同调群 $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 定义为

$$H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})=\begin{cases}Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})/B^q(\mathscr{U},\mathscr{F});q\geqslant 1\\ Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F});q=0.\end{cases}$$

注：这种上同调群的定义和通常多面体上同调群的定义相仿．通常多面体的上同调群是作为下同调群的对偶来定义的，上链是下链的对偶，如果 $\sigma$ 是一个 $q$ 维下链，那末 $q$ 维上链是一个线性函数 $f:\sigma\to Z$. 如果我们考虑的是整数系数的上同调群的话．

**定理 6.3.2** $H^0(\mathscr{U},\mathscr{F})\cong\Gamma(X,\mathscr{F})$

**证明** 由定义 6.3.3，$H^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=Z^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=\{f\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})\mid\delta f=0\}$. 即在 $C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 中的元素，对每一零维单形 $U$，和 $f(U)\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ 都有 $\delta f=0$. 这就表示下式成立

$$0=(\delta f)_{U\cap V}=f(U)|_{U\cap V}-f(v)|_{U\cap V},$$

也就是在 $U\cap V$ 上，$f(U)=f(V)$. 换句话说 $f$ 在各开集上定义的截影在相交部份彼此重合，因此它们可自然地拼成整个 $X\to\mathscr{F}$ 的一个截影，即 $\Gamma(X,\mathscr{F})$ 的一元素．反之，$\Gamma(X,\mathscr{F})$ 中的任一元素，限制在各开集 $U$ 上，自然地给出了 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 的一元素，而且在相交处相等，即 $f$ 是闭的，也就是 $\delta f=0$ · □

以上定义的同调群的明显缺陷是它依赖于 Z 上的开复盖 $\mathscr{U}$，但从 $H^0(\mathscr{U},\mathscr{F})\cong\Gamma(X,\mathscr{F})$ 来看，它应该反映 $X$ 的内在性质，与取什么样的复盖无关，所以我们应当设法给出一种与开复盖的取法无关的上同调群的定义．为此我们在拓扑空间 $X$ 的所有开复盖之间引进一个自反，传递关系，使之成为一个有向集，然后用直接极限来定义内蕴的(intrinsic) 上同调解．

**定义 6.3.3′** 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$，$\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$ 是拓扑空间 $X$ 的两个开复盖，$\mathscr{V}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的一个"加细"，如果存在一个映射 $\mu:\mathscr{V}\to\mathscr{U}$，使

$\forall\ \alpha, V_\alpha \subset \mu(V_\alpha) \in \mathscr{U}$，例如，如果 $\mathscr{V}$ 的每一开集 $V_\alpha$ 都至少包含在 $\mathscr{U}$ 的一个开集之中，那末令 $\mu: V_\alpha \to$ 包含 $V_\alpha$ 的 $\mathscr{U}$ 的某一开集，即可.

**定理 6.3.3** 设 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$ 是 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 的一个"加细"，那末"加细"映射 $\mu$ 自然地诱导了上同调群之间的一个同态：

(6.3.4) $$\mu^*: H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathscr{V}, \mathscr{F}).$$

**证明：** 首先，$\mu$ 自然地诱导一个同态 $C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to C^q(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ 如下：任取 $\mathscr{V}$ 的 $q$ 维单形 $\sigma = (V_0, \cdots, V_q)$，则 $\mu\sigma = (\mu(V_0), \cdots, \mu(V_q))$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个 $q$ 维单形，任取 $f \in C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$，定义 $\mu f \in C^q(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ 为：

$$(\mu f) = f_{\mu\sigma},$$

于是我们有下列图表：

(6.3.5) $$\begin{array}{ccc} C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\mu} & C^q(\mathscr{V}, \mathscr{F}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \\ C^{q+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F}) & \to & C^{q+1}(\mathscr{V}, \mathscr{F}) \end{array}$$

并且(6.3.5)是交换的，即 $\delta\mu = \mu\delta$. 这是因为

$$(\delta\mu f)_\sigma = \sum (-1)^j (\mu f)_{\hat{\sigma}_j} = \sum (-1)^j f_{\mu\hat{\sigma}_j},$$

$$(\mu f)_\sigma = (\delta f)_{\mu\sigma} = \sum (-1)^j f_{(\widehat{\mu\sigma})_j} = \sum (-1)^j f_{\widehat{\mu\sigma}_j},$$

其中 $\sigma = (V_0, \cdots, V_{q+1})$，而 $\hat{\sigma}_j = (V_0, \cdots, \hat{V}_j, \cdots, V_{q+1}$. 由此立得

$$Z^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to Z^q(\mathscr{V}, \mathscr{F}), B^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to B^q(\mathscr{V}, \mathscr{F}).$$

因此，$\mu$ 诱导出同态

$$\mu^*: H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}). \square$$

要注意的是，当 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 固定时，加细映射不是唯一的，具体例子可参阅伍鸿熙，吕以辇，陈志华[1981]第 277 页. 但下面的定理指出，上同调群之间的同态与具体的加细映射取法无关.

**定理 6.3.4** 设 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 是拓扑空间 $X$ 的两个开复盖，而且 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细，又 $\mu_1, \mu_2: \mathscr{V} = \{V_\alpha\} \to \mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的两个

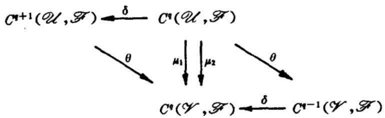
加细映射，则它们诱导的上同调群之间的同态相同：$\mu_1^* = \mu_2^*$.

**证明**：当 $q = 0$ 时，$H^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F}) \cong H^0(\mathscr{V},\mathscr{F})$，不需要证明.

现设 $q > 0$，对 $\mathscr{V}$ 的任何 $q$ 维单形 $\sigma = (V_0,\cdots,V_q)$，令

$\theta_j\sigma = (\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_j,\mu_2V_j,\cdots,\mu_2V_q)$，$0 \leqslant j \leqslant q$ 是 $\mathscr{U}$ 的 $q+1$ 维单形，因此，可作同态 $\theta: C^{q+1}(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathscr{V},\mathscr{F})$ 如下：任取 $f \in C^{q+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则定义

$(\theta f)\sigma = \sum\limits_{j=0}^{q}(-1)^j f_{\theta_j\sigma}$，$\forall$ $\mathscr{V}$ 是 $q$ 维单形 $\sigma$，考虑下图




我们有等式

(6.3.6) $$\mu_2 - \mu_1 = \delta\theta + \delta\theta.$$

现证明如下：因为

$$(\delta\theta)f_\sigma = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k(\theta f)_{\hat{\sigma}_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\sum_j(-1)^j f_{\theta_j(V_0,\cdots,\hat{V}_k,\cdots,V_q)} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k$$

$$\Big[\sum_{j<k}(-1)^j f_{(\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_j,\mu_2V_j,\cdots,\widehat{\mu_2V_k},\cdots,\mu_2V_q)}$$

$$+\sum_{j>k}(-1)^{j+1}f_{(\mu_1V_0,\cdots,\widehat{\mu_1V_k},\cdots\mu_1V_j,\mu_2V_j,\cdots,\mu_2V_q)}\Big],$$

$$-(\theta\delta f)_\sigma = \sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}(\delta f)\theta_k\sigma$$

$$= \sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}(\delta f)_{(}\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_k,\mu_2V_k,\cdots,\mu_2V_q)$$

$$= \sum_{k=0}^{q}(-1)^{k+1}\Big[\sum_{j<k}(-1)^j$$

$$f_{(}\mu_1V_0,\cdots,\widehat{\mu_1V_j},\cdots,\mu_1V_k,\mu_2V_k,\cdots,\mu_2V_q)$$

$$+ \sum_{j>k}(-1)^{j+1}f_{(}\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_k,\mu_2V_k,\cdots,\widehat{\mu_2V_j},\cdots,\mu_2V_q)$$

$$+ (-1)^k f_{(}\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_{k-1},\mu_2V_k,\cdots,\mu_2V_q)$$

$$+ (-1)^{k+1}f_{(}\mu_1V_0,\cdots,\mu_1V_k,\mu_2V_{k+1},\cdots,\mu_2V_q)\Big]$$

$$= (\delta\theta f)_\sigma + (\mu_1 f)_\sigma - (\mu_2 f)_\sigma.$$

这就证明了(6.3.6)式.

如果 $f \in Z^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$,即 $\delta f = 0$,则由 $\mu_2 - \mu_1 = \delta\theta + \theta\delta$ 得

$$\mu_2 f - \mu_1 f = \delta(\theta f),$$

即 $\mu_1 f + \mu_2 f$ 只相差一个上边缘,它们在同一上同调类中,因此 $\mu_1^* = \mu_2^*$,定理证明.□

由上述定理可知,同态 $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathscr{V},\mathscr{F})$ 仅依赖于复盖 $\mathscr{U}$ 及其加细 $\mathscr{V}$ 本身,而与具体加细映射无关,因此这个同态可以用符号 $\rho_{\mathscr{U}\mathscr{V}}$ 来记它.

现在用 $A = \{\mathscr{U} | \mathscr{U}$ 是 $X$ 的开复盖$\}$ 表示 $X$ 的所有开复盖所成的族,如果 $\mathscr{V} \in A$ 是 $\mathscr{U} \in A$ 的加细,则记为 $\mathscr{U} > \mathscr{V}$,显然,在 $A$ 中,"$<$"是一个偏序关系,而且容易看出,如果 $\mathscr{U} > \mathscr{V} > \mathscr{W}$,则有

(6.3.7) $$\rho_{\mathscr{W}\mathscr{U}} = \rho_{\mathscr{W}\mathscr{V}} \circ \rho_{\mathscr{W}\mathscr{V}}.$$

这样我们就可以象 6.1.3 段那样定义直接极限了. 这时我们有

有向集合 $A = \{\mathscr{U} | \mathscr{U}$ 是 $X$ 的开复盖$\}$,

偏序关系 $<$,即加细关系,

对 $\forall\ \mathscr{U} \in A, \mathscr{U} \to H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$,

同态 $\rho_{\mathscr{V}\mathscr{U}}: H^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathscr{V},\mathscr{F})$,如 $\mathscr{U} > \mathscr{V}$,

相容条件:$\rho_{\mathscr{W}\mathscr{U}} = \rho_{\mathscr{W}\mathscr{U}} \circ \rho_{\mathscr{V}\mathscr{U}}$,如 $\mathscr{U} > \mathscr{V} > \mathscr{W}$,

$\{H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})_{\mathscr{U}\in A}, \prec, \rho_{\mathscr{V}\mathscr{U}}\}$ 是有向集 $A$ 上的 Abel 群系.

在所有的上同调群的集合 $\{H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})\}$ 中可利用偏序关系和同态引进等价关系:如 $f\in H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$, $g\in H^q(\mathscr{V},\mathscr{F})$,则 $f\sim g \Leftrightarrow \exists\ \mathscr{W}\in A, \mathscr{W}\prec\mathscr{U}, \mathscr{W}\prec\mathscr{V}$,使 $\rho_{\mathscr{W}\mathscr{U}}f=\rho_{\mathscr{W}\mathscr{V}}g$. 按这个等价关系所得的等价类的集合就是上同调群 $H^q(X,\mathscr{F})$,即我们有

**定义 6.3.4** ($\check{\mathrm{C}}$ech 上同调群)$\check{\mathrm{C}}$ech 上同调群可以定义为

$$(6.3.8)\qquad H^q(Z,\mathscr{F})=\varinjlim_{\mathscr{U}\in A}H^q(\mathscr{U},\mathscr{F}).$$

到现在我们已经有了两种上同调的定义,我们自然希望对绝大多数常见的拓扑空间,例如复流形,两种上同调群同构,将这两种上同调群联系起来的 Leray 定理. 以下我们就来介绍这个重要定理,先证明.

**引理 6.3.1** 如 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个松软层,$\mathscr{U}=\{U_j\}$ 是 X 的一个开复盖,则 $\check{\mathrm{C}}$ech 上同调

$$(6.3.9)\qquad H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})=0, \forall\ q>0.$$

也就是按 $\check{\mathrm{C}}$ech 上同调的定义,松软层也是零调的.

**证明** 在证明之前,我们先引进一个名词:如 $G\subset X$ 是一个开集,而 $\mathscr{L}$ 是 $G$ 上的一个层,
则

$$\tilde{\mathscr{L}}=\begin{cases}\mathscr{L}_x, & x\in G,\\ 0, & x\overline{\in} G,\end{cases}$$

定义了 $X$ 上的一个层,$\tilde{\mathscr{L}}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的**平凡扩张**. 显然,如果 $\mathscr{L}$ 是松软的,则 $\tilde{\mathscr{L}}$ 也是松软的.

对 $i_0,\cdots,i_k\in I$,而且各不相同,且 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}\neq\varnothing$. $\mathscr{F}$ 限制在 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}$ 上自然是 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}$ 上的层,再将它平凡扩张到整个 $X$,得到

$$\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}=(\mathscr{F}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}})^{\sim}$$

(上式右边的 ～ 表示平凡扩张). 按平凡扩张的定义，可知对 ∀ 开集 $U$，有 $\Gamma(U,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})\cong\Gamma(U\cap U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k},\mathscr{F})$ 显然 $\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}$ 是 $X$ 上的松软层.

将所有这样的层 $\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}$ 直和起来得到 $\bigoplus_{i_0\cdots i_k}\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}$，它自然还是 $X$ 上的层，考虑其中对下指标 $i_0,\cdots,i_k$ 反对称的元素所成的层，记作 $\mathscr{F}^{(k)}$，则 $\mathscr{F}^{(k)}$ 也是 $X$ 上的松软层. 这是因为对每一开集 $U\subset X$，$\Gamma(U,\mathscr{F}^{(k)})=\bigoplus\Gamma(U,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})$ 中的反对称元素全体. 由于 $\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}$ 是松软层，因此 $\Gamma(U,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})$ 中的任一元素都可以扩张为 $\Gamma(X,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})$ 中的一个元素，再注意层 $\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k}$ 并不依赖于指示 $i_0,\cdots,i_k$ 的顺序，因此 $\bigoplus\Gamma(U,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})$ 中的反对称元素仍可以扩充为 $\bigoplus\Gamma(Z,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})$ 中的反对称元素，也就是 $\Gamma(X,\mathscr{F}^{(k)})$ 中的一个元素，此外，还有

$$\begin{aligned}\Gamma(X,\mathscr{F}^{(k)})&\cong\bigoplus\Gamma(X,\mathscr{F}_{i_0\cdots i_k})\text{ 中的反对称元素}\\&\cong\bigoplus\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k},\mathscr{F})\text{ 中的反对称元素}\\&\cong C^k(\mathscr{U},\mathscr{F}).\end{aligned}$$

现考虑层的同态序列

$$(6.3.10)\quad 0\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}^{(0)}\xrightarrow{\delta_0}\mathscr{F}^{(1)}\xrightarrow{\delta_1}\mathscr{F}^{(2)}\xrightarrow{\delta_2}\cdots$$

其中 $\delta$ 的定义为：对 ∀ $x\in X$，$f=\{f_{i_0\cdots i_k}\}\in\mathscr{F}_x^{(k)}$

$$\delta_k f=(g_{i_0\cdots i_{k+1}})\in\mathscr{F}_x^{k+1},$$

$$g_{i_0\cdots i_{k+1}}=\sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu f_{i_0\cdots\hat{i}_\nu\cdots i_{k+1}},$$

$\delta_k\circ\delta_{k-1}=0$ 是显然的，还可证明(6.3.10) 是正合的，为此，对 ∀ $x\in X$，设 $\{U_j\}_{j\in J}\subset\mathscr{U}$ 是所有适合 $x\in U_j$ 的 $U_j$ 的集合，如 $g=\{g_{i_0\cdots i_{k+1}}\}\in\mathscr{F}_x^{(k+1)}$，满足 $\delta g=0$，要证明 $g$ 可表为 $\mathrm{Im}(\delta\mathscr{F}_x^{(k)})$ 中的一个元素，为此任取一固定的 $j\in J$，定义 $f$ 如下：

$$f=\{f_{i_0\cdots i_k}\}\in\mathscr{F}_x^{(k)},\quad\text{其中 } f_{i_0\cdots i_k}=g_{ji_0\cdots i_k}$$

则有

$$
\begin{aligned}
(\delta_k f)_{i_0\cdots i_{k+1}} &= \sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu f_{i_0\cdots \hat{i}_\nu \cdots i_{k+1}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu g_{i_0\cdots \hat{i}_\nu \cdots i_{k+1}} = g_{i_0\cdots i_{k+1}} \\
&- [g_{i_0\cdots i_{k+1}} - \sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu g_{ji_0\cdots i_\nu\cdots i_{k+1}}] \\
&= g_{i_0\cdots i_{k+1}} - (\delta_{k+1} g)_{ji_0\cdots j_{k+1}} = g_{i_0\cdots i_{k+1}}.
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了序列(6.3.10)的正合性,如同定理6.2.3(松软层是零调层)的证明一样,可以推知

$0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \to \Gamma(X,\mathscr{F}^{(0)}) \xrightarrow{\delta_0^*} \Gamma(X,\mathscr{F}^{(1)}) \xrightarrow{\delta_1^*} \cdots$ 是群的正合序列.但前面已指出 $\Gamma(X,\mathscr{F}^{(k)}) \cong C^{(k)}(\mathscr{U},\mathscr{F})$,所以上式也可写成

$$
(6.3.11)\quad 0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \to C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_0^*} C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_1^*} C^2(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to \cdots
$$

是正合的,而这正是 $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) = 0, \forall\, q \geqslant 1$.引理证毕.□

**定义 6.3.5** (Leray 复盖)设 $\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的一个层,$\mathscr{U} = \{U_j\}$ 是 Z 的一个开复盖,如果对于任意的 $U_{i_0},\cdots,U_{i_q} \in \mathscr{U}$,$H^p(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{F}) = 0, \forall\, P > 0, \forall\, q \geqslant 0$,则开复盖 $\mathscr{U}$ 称为 **Leray 复盖**.注意,这里的 $H^p(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{F})$ 是指按松软分解意义下的上同调.

**定理 6.3.5** (Leray)设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个层,$\mathscr{U} = \{U_j\}$ 是 $X$ 的一个 Leray 复盖,则 Čech 上同调和按松软分解意义下的上同调(即 Grothendick 上同调)同构

$$
(6.3.12)\qquad H^p(X,\mathscr{F}) \cong H^p(\mathscr{U},\mathscr{F}), \forall\, p \geqslant 0.
$$

为了证明这个定理,我们先证明下列

**引理 6.3.2** 如果我们有下列双重复形的交换图表.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow{d} & A^{0} & \xrightarrow{d} & A^{1} & \xrightarrow{d} & A^{2} & \xrightarrow{d} & A^{3} & \xrightarrow{d} & \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
0 & \to & B^{0} & \xrightarrow{d} & A^{00} & \xrightarrow{d} & A^{01} & \xrightarrow{d} & A^{02} & \xrightarrow{d} & A^{03} & \xrightarrow{d} & \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
0 & \to & B^{1} & \xrightarrow{d} & A^{10} & \xrightarrow{d} & A^{11} & \xrightarrow{d} & A^{12} & \xrightarrow{d} & A^{13} & \xrightarrow{d} & \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
0 & \to & B^{2} & \xrightarrow{d} & A^{20} & \xrightarrow{d} & A^{21} & \xrightarrow{d} & A^{22} & \xrightarrow{d} & A^{23} & \xrightarrow{d} & \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
0 & \to & B^{3} & \xrightarrow{d} & A^{30} & \xrightarrow{d} & A^{31} & \xrightarrow{d} & A^{32} & \xrightarrow{d} & A^{33} & \xrightarrow{d} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}
$$

其中 $A^i, B^i, A^{ij}$ 都是Abel群，并且除去第一行和第一列外，其余各行和各列都是正合的. 则有

$$
(6.3.13)\qquad H^p(A):=\frac{Z_d(A^p)}{B_d(A^p)}=\frac{\mathrm{Ker}(A^p\xrightarrow{d}A^{p+1})}{\mathrm{Im}(A^{p-1}\xrightarrow{\delta}A^p)}
$$

$$
\cong H^p(B):=\frac{Z_\delta(B^p)}{B_\delta(B^p)}=\frac{\mathrm{Ker}(B^p\xrightarrow{\delta}B^{p+1})}{\mathrm{Im}(B^{p-1}\xrightarrow{\delta}B^p)},p\geqslant 0.
$$

**证明** 当 $p=0$ 时，$H^0(A)\cong A\cong H^0(B)$ 是显然的，所以只要证明 $p>0$ 时的情形.

当 $p>0$ 时，可以按照“之”字形的路线建立 $H^q(A)$ 与 $H^q(B)$ 之间的一个同态，现以 $q=1$ 为例，其路线为

$$
\begin{array}{ccc}
 & & A^{1} \\
 & & \uparrow \\
 & & \vdots \\
A^{00} & \to & A^{01} \\
\uparrow & & \\
\vdots & & \\
A^{10} & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \\ B^{1}\to A^{10}\end{array}
$$

以 $Z(A^{pq})$ 表示 $A^{pq}$ 中的闭链，$B(A^{p,q})$ 表示 $A^{pq}$ 的边缘.

现以 $q=1$ 为例，证明 $H^1(A)\cong H^1(B)$.

先证：$Z_\delta(B^1)\to Z_a(A^1)$.

任取 $\alpha\in B^1$，使 $\delta\alpha=0$，即 $\alpha\in Z_\delta(B^1)$ ——→ 令 $\alpha^{10}=d\alpha\in A^{10}$，则 $\delta\alpha^{10}=\delta d\alpha=d\delta\alpha=0$，即 $\alpha^{10}\in Z_\delta(A^{10})$. ——→ 由列的正合性 $\exists\ \alpha^{00}\in A^{00}$，使 $\alpha^{10}=\delta\alpha^{00}$，——→ 令 $\alpha^{01}=d\alpha^{00}\in A^{01}$，则 $\delta\alpha^{01}=\delta d\alpha^{00}=d\delta\alpha^{00}=d\alpha^{10}=dd\alpha=0$，

故 $\alpha^{01}\in Z_\delta(A^{01})$，

——→ 由列的正合性，$\exists\ \alpha^*\in A^1$，使 $\alpha^{01}=\delta\alpha^*$，这时有

$$\delta(d\alpha^*)=d\delta\alpha^*=d_\alpha{}^{01}=dd\alpha^{00}=0.$$

因为 $0\to A^1\xrightarrow{\delta}A^{01}\to$ 是正合的，所以 $\delta$ 是单的，故 $d\alpha^*=0$，因而 $\alpha^*\in Z_d(A^1)$. 即我们有

$\alpha\in Z_\delta(B^1)\to\alpha^*\in Z_d(A^1)$.

次证：　　　　$B_\delta(B^1)\to B_d(A^1)$.

任取 $\beta\in B^1$，存在 $\beta^0\in B^0$ 使 $\beta=\delta\beta^0\in B^1$，即 $\beta=B_\delta(B^1)$. ——→ 令 $\alpha^{10}=\alpha\beta$，因 $d\alpha^{10}=dd\beta=0$，故 $\alpha^{10}\in Z_\delta(A^{10})$，——→ 由列的正合性，$\exists\ \alpha^{00}\in A^{00}$，使 $\alpha^{10}=\delta\alpha^{00}$，于是 $\delta\alpha^{00}=\alpha^{10}=d\beta=d\delta\beta^0=\delta d\beta^0$，$\delta(\alpha^{00}-d\beta^0)=0$，由列的正合性，$\exists\ \alpha^0\in A^0$，使 $\alpha^{00}-d\beta^0=\delta\alpha^0$，即 $\alpha^{00}=d\beta^0+\delta\alpha^0$，

——→ 令 $A^{01}\exists\ \alpha^{01}=d\alpha^{00}=d(d\beta^0+\delta\alpha^0)=d\delta\alpha^0=\delta d\alpha^0$，

——→$\exists\ \alpha^*\in A^1$，使 $\alpha^{01}=\delta\alpha^*$，即 $\delta d\alpha^0=\delta\alpha^*$，$\delta(d\alpha^0-\alpha^*)=0$，由于 $\delta$ 是单的，于是 $d\alpha^0-\alpha^*=0$，即 $\alpha^*=d\alpha^0$，也就是 $\alpha^*\in B_d(A^1)$. 即我们有

$$\beta\in B_\delta(B^1)\to\alpha^*\in B_d(A^1).$$

这就证明了 $H^1(B)\to H^1(A)$. 因为 $A^1$ 与 $B^1$ 位置是对称的，同样的步骤也可证明 $H^1(A)\to H^1(B)$. 所以上述对应是同构. 引理证毕. □

**Leray 定理的证明**：考虑 $\mathscr{F}$ 的一个松软分解

$$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}^0\to\mathscr{L}^1\to\mathscr{L}^2\to\cdots$$

由于 $\mathscr{L}^i(i\geqslant 0)$ 是松软层，故根据(6.3.11)

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{L}^i) \to C^0(\mathscr{U},\mathscr{L}^i) \to C^1(\mathscr{U},\mathscr{L}^i) \to \cdots$$

是正合的，再由假设 $H^p(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{F}) = 0, p > 0$，可知对 $\mathscr{U}$ 的任何一个 $q$ 维单形

$$0 \to \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{F}) \to \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{L}^0)$$
$$\to \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q},\mathscr{L}^1) \to \cdots$$

是正合的，因而

$$0 \to C^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathscr{U},\mathscr{L}^0) \to C^q(\mathscr{U},\mathscr{L}^1)$$
$$\to C^q(\mathscr{U},\mathscr{L}^2) \to \cdots$$

也是正合的($q \geqslant 0$)，这样一来，双重复形

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \Gamma(X,\mathscr{F}) & \to & \Gamma(X,\mathscr{L}^0) & \to & \Gamma(X,\mathscr{L}^1) & \to & \Gamma(X,\mathscr{L}^2) & \to \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) & \to & C^0(\mathscr{U},\mathscr{L}^0) & \to & C^0(\mathscr{U},\mathscr{L}^1) & \to & C^0(U,\mathscr{L}^2) & \to \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) & \to & C^1(\mathscr{U},\mathscr{L}^0) & \to & C^1(\mathscr{U},\mathscr{L}^1) & \to & C^1(\mathscr{U},\mathscr{L}^2) & \to \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & C^2(\mathscr{U},\mathscr{F}) & \to & C^2(\mathscr{U},\mathscr{L}^0) & \to & C^2(\mathscr{U},\mathscr{L}^1) & \to & C^2(\mathscr{U},\mathscr{L}^2) & \to \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

中除去第一列和第一行外，其余各行和各列都是正合的，直接引用引理 6.3.2 后，由第一行所得的上同群是 $H^p(X,\mathscr{F})$，而由第一列所得的上同调群则是 Čech 上同调群 $H^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$，两者同构，定理证明. □

Leray 定理是层与上同调理论中的基本定理，下一节我们将介绍它的重要意义.

## § 6.4 强层 deRham 定理与 Dolbeaul 定理

### 6.4.1 强层

本节我们将对拓扑空间 $X$ 加以适当限制. 我们假设 $X$ 是仿紧的(Paracompact)Hausdorff 空间(参阅定义 3.1.6). 根据 Dieudonne' 定理,具有可数基的微分流形(或复流形)是仿紧的,因此这样的拓扑空间 $Z$,仍然具有广泛的代表性.

**定义 6.4.1**(层的单位分解) 设 $\mathscr{F}$ 是仿紧 Hausdorff 空间 $X$ 上的层,$\mathscr{U} = \{U_j\}$ 是 $X$ 的局部有限开复盖,若存在一族层同态 $\{\eta_j\}$,$\eta_j: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 满足:

$i)$ $\eta_j(\mathscr{F}_x) = 0, x \overline{\in} U_j$,

$ii)$ $\sum\limits_i \eta_j =$ 恒同同态,

则同态族 $\{\eta_j\}$ 称为从属于 $\mathscr{U}$ 的层 $\mathscr{F}$ 的单位分解.

注意,因为 $\mathscr{U}$ 是局部有限的,任何 $x \in X$ 是至多属于有限个 $U_i$,因而 $ii)$ 中的 $\sum\limits_j \eta_j$ 实际上是有限和(参阅定理 3.1.8).

**定义 6.4.2** (强层)设 $\mathscr{F}$ 是仿紧 Hausdorff 空间 $X$ 上的层,$\mathscr{U} = \{U_i\}$ 是 $X$ 的任一局部有限开复盖,如果存在从属于 $\mathscr{U}$ 的层 $\mathscr{F}$ 的单位分解,则 $\mathscr{F}$ 称为**强层**(fine sheaf).

强层的重要性可以从下面的例子看出.

**例 6.4.1** 设 $X$ 是具有可数基的微分流形(或复流形),则它是仿紧的,对它的任何一个局部有限复盖 $\mathscr{U} = \{U_a\}$,取其相应的单位分解 $\{\varphi_a\}$,使 $(i)\varphi_a \in C_0^\infty(X)$, $\mathrm{Supp}\varphi_a \subset U_a$, $(ii) \sum\limits_a \varphi_a(x) = 1$, $\forall x \in X$;如果

$\mathscr{F}: = X$ 上的 $C^\infty, C^{(k)}$ 或任意类函数的芽层,则 $\mathscr{F}$ 是 $X$ 上的强层,因为这时层的单位分解可以定义为 $\eta_a: f \in \mathscr{F} \to \varphi_a f \in \mathscr{F}$.

同理 $X$ 上的微分形式的芽层,复流形 $X$ 上的 $(p,q)$ 型微分形式

的芽层等也是强层，但显然全纯函数的芽层 $\theta$ 不是强层.

下述定理表明了强层的主要性质和意义：

**定是 6.4.1** 设 $X$ 是仿紧的 Hausdorff 空间，$\mathscr{F} \to X$ 是强层，则

$$H^p(X,\mathscr{F}) = 0, \forall\, p \geq 1. \tag{6.4.1}$$

即 $\mathscr{F}$ 是零调的(按松软分解的意义).

**证明**. 对 $\mathscr{F}$ 作松软分解：

$$0 \to \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F}) \to C^1(\mathscr{F}) \to C^2(\mathscr{F}) \to \cdots$$

由于 $\mathscr{F}$ 是强层，所以 $C^0(\mathscr{F})$，$C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F} = \mathscr{F}^1$ 等等也是强层，由短的层正合序列

$$0 \to \mathscr{F} \to C^0(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}^1 \to 0$$

诱导出长的同调群正合序列：

(6.4.2)

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \to H^0(X,C^0(\mathscr{F}) \to \cdots \to H^{p-1}(X,C^0(\mathscr{F}))$$

$$\to H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1) \to H^p(X,\mathscr{F}) \to H^p(X,C^0(\mathscr{F})) \to \cdots$$

因为 $C^0(\mathscr{F})$ 是松软层，故 $H^{p-1}(X,C^0(\mathscr{F})) = H^p(X,C^0(\mathscr{F})) = 0$，由此得

$$H^p(X,\mathscr{F}) = H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1)$$

同理可得

$$H^p(X,\mathscr{F}) = H^{p-1}(X,\mathscr{F}^1) = H^{p-2}(X,\mathscr{F}^2) = \cdots$$
$$= H^1(X,\mathscr{F}^{p-1}).$$

因为所有 $\mathscr{F}^i$ 都是强层，所以只要证明对任一强层 $\mathscr{F}$ 都有 $H^1(\mathscr{F}) = 0$，就行.

(6.4.2) 的前一段为

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\lambda} \Gamma(X,C^0(\mathscr{F})) \xrightarrow{\mu} \Gamma(X,\mathscr{F}^1)$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathscr{F}) \to 0$$

如能证明 $\mu$ 是满的，那末就有

$$H^1(X,\mathscr{F}) = \delta^*(\Gamma(X,\mathscr{F}^1)) = \delta^* \circ \mu(\Gamma(X,C^0(\mathscr{F})) = 0$$

为此设 $S \in \Gamma(X,\mathscr{F}^1)$，由于

$$\mu: C^0(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}^1 = C^0(\mathscr{F})/\mathscr{F}$$

是满同态，所以对 $\forall\, x \in X$，必存在一开集 $U_x$，使得

$$S|_{U_x} = \mu(h_x), h_x \in \Gamma(U_x, C^0(\mathscr{F})),$$

这些 $\{U_x\}$ 可构成 $X$ 的一个开复盖，因为 $X$ 是仿紧的，所以一定存在局部有限的加细复盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，由于 $C^0(\mathscr{F})$ 是强层，所以存在从属于 $\{U_i\}$ 的一个单位分解 $\{\eta_i\}$ 于是对 $\forall\, i \in I, \eta_i S = \mu(\eta_i h_{x_i})$，而

$$\sum \eta_i h_{xi} \in \Gamma(X, C^0(\mathscr{F})),$$

并且

$$\mu(\sum \eta_i h_{xi}) = \sum \mu(\eta_i h_{xi}) = \sum \eta_i S = S,$$

此即表示 $\mu$ 为满同态. □

### 6.4.2 Poincarè 引理和 Dolbeault 引理

**引理 6.4.1**(Poincarè 引理)　设 $D$ 是 $R^n$ 中的凸区域，以 $A^p(D)$ 记 $D$ 中系数是可微的 $P$ 次形式空间，如果 $\omega \in A^p(D), d\omega = 0$，则存在 $\alpha \in A^{p-1}(D)$，使 $\omega = d\alpha$.

证明：为了证明引理，我们设法定义一个 $p-1$ 次形式为 $p$ 次形式的函数 $I$，使得 $I(0) = 0$，且对任何形式 $\omega \in A^p(D)$，有 $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$. 由此知，若 $d\omega = 0$，则 $\omega = d(I\omega)$，因此命 $\alpha = I\omega \in A^{p-1}(D)$，就得到 $\omega = d\alpha$.

为此，不妨设 $0 \in D$，任取 $x \in D$，则 $tx(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 仍在 $D$ 中，将 $\omega \in A^p(D)$ 写成

$$\omega = \omega_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

令

$$I\omega = \sum_{R=1}^{p}(-1)^{k-1}\left(\int_0^1 t^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)dt\right)x^{i_k}dx^{i_1} \wedge \cdots$$

$$\wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in A^{p-1}(D).$$

要证 $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ 只要详尽的计算：

$$d(I\omega) = (p\int_0^1 t^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)dt)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge d^{i_k} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^p \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)}{\partial x_j}dtx^{i_k}dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge$$

$$\widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^j}dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

$$I(d\omega) = \sum_j \int_0^1 t^p \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)}{\partial x^j}x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$- \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^p \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)}{\partial x^j}x^{i_k}dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots$$

$$\wedge dx^{i_p}.$$

故

$$d(I\omega) + I(d\omega)$$

$$= \int_0^1 [pt^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx) + \sum_{j=1}^{n} t^p \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}(tx)}{\partial x^j}x^j]dtdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$= [\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t^p\omega_{i_1\cdots i_p}(tx))dt]dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$= \omega_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \omega. \square$$

**引理 6.4.2**(Dolbeanlt 引理)　命 $\bar{\triangle} \subset C^n$ 一紧致多圆盘，$\omega$ 为在 $\bar{\triangle}$ 的开邻域上的一$(p,q)$ 型 $C^\infty$ 微分形式，如果 $q > 0$，且 $\bar{\partial}\omega = 0$，那末在 $\triangle$ 上存在一$(p,q-1)$ 型的 $C^\infty$ 微分形式 $\eta$，使得 $\omega = \bar{\partial}\eta$.

**注**：当 $\triangle$ 是 $C^n$ 中的任一区域时，引理所提的问题就是著名的非齐次 $\bar{\partial}$ 问题，大范围的解的存在和区域的深刻的函数论性有关，只对一些特殊类型的区域成立. 除了多圆盘以外，对强拟凸域也成立，参阅第四章.

**证明**　当 $n = 1$ 时，Dolbeault 引理就是非齐次 $\bar{\partial}$ 问题，我们已

在定理 1.3.2 利用 Cauchy-Green 公式证明了这个引理，现在我们用归纳法来证明一般的情形，假定对 $\leqslant n-1$ 引理已经证明，将 $\omega$ 写成

$$\omega = d\bar{z}_n \wedge \alpha + \beta$$

这里 $\alpha$、$\beta$ 中都不含 $d\bar{z}_n$ 设

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}}$$

由 Cauchy-Green 公式可知在 $\bar{\triangle}_n$ 的某一开邻域内存在 $\gamma_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}} \in C^\infty$，使

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \gamma_{i_1\cdots i_p,\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}} = \alpha_{i_1\cdots i_p,\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}}$$

（参考 R. C. Gunning & HRossi[1965]*PP*. 25-27），命

$$\gamma = \sum \gamma_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}}$$

则有

$$\bar{\partial}\gamma = d\bar{z}_n \wedge \alpha + \delta,$$

其中的 $\delta$ 也不包含 $d\bar{z}_n$ 项，于是

$$\omega - \bar{\partial}\gamma = \beta - \delta,$$

因此 $\omega - \bar{\partial}\gamma$ 中不含 $d\bar{z}_n$ 项. 由于

$$\bar{\partial}(\omega - \bar{\partial}\gamma) = 0 \tag{6.4.3}$$

可知 $\omega - \bar{\partial}\gamma$ 关于 $z_n$ 全纯. 将 $z_n$ 看成参数，由归纳假定知存在 $\xi$ 使

$$\bar{\partial}'\xi = \omega - \bar{\partial}\gamma,$$

这里的 $\bar{\partial}'$ 不包含对 $\bar{z}_n$ 的微分. 由于 $\omega - \bar{\partial}\gamma$ 关于 $z_n$ 全纯，所以 $\xi$ 也是对 $z_n$ 全纯的，于是

$$\omega = \bar{\partial}'\xi - \bar{\partial}\gamma = \bar{\partial}\xi - \bar{\partial}\gamma = \bar{\partial}(\xi - \gamma),$$

取 $\eta = \xi - \gamma$，引理得证. □

### 6.4.3 deRham 定理和 Dolbeault 定理

假设 $M$ 是一微分流形，以 $A^q$ 表示 $M$ 上 $q$ 次微分形式所成的芽层，$M$ 上的实数常层记为 $R$，则由 Poincarè 引理（引理 6.4.1）知道

$$(6.4.4)\qquad 0\to R\xrightarrow{i}A^0\xrightarrow{d}A^1\xrightarrow{d}A^2\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}A^m\to 0$$

是一层的正合序列，其中 $i$ 是包含同态，$d$ 是外微分运算，注意层的正合性是一个局部概念，所以我们可以用 Poincarè 引理来断定(6.4.4)是一个层的正合序列.

如果 $M$ 是仿紧的 $C^\infty$ 流形，则所有的 $A^i$ 都是 $M$ 上的强层，而(6.4.4)给出了 $R$ 的强层分解式，由定理 6.4.1 知道所有的 $A^i$ 都是零调层，再根据定理 6.2.6，我们就证明了下述

**定理 6.4.2**（deRham 定理） 如果 $M$ 是仿紧的微分流形，则有

$$(6.4.5)\qquad H^q(M,R)=\frac{\mathrm{Ker}[\Gamma(M,A^q)\xrightarrow{d}\Gamma(M,A^{q+1})]}{\mathrm{Im}[\Gamma(M,A^{q-1})\xrightarrow{d}\Gamma(M,A^q)]}$$

如果 $A^i$ 是复的微分形式，那么同样有

$$(6.4.6)\qquad H^q(M,C)=\frac{Z^q(M,A)}{B^q(M,A)}.$$

如果 $M$ 是复流形 $A^{p,q}$ 表示 $M$ 上的 $C^\infty(p,q)$ 形式芽层，那末由 $\bar\partial$ 的 Dolbeault 引理，(引理 6.4.2) 就知道

$$(6.4.7)\qquad 0\to\theta\to A^{00}\xrightarrow{\bar\partial}A^{01}\xrightarrow{\bar\partial}A^{02}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots$$

是一个层的正合序列，其中 $\theta$ 是 $M$ 上的全纯函数芽层.

如果 $M$ 是仿紧的复流形，则所有的 $A^{0,q}$ 都是 $M$ 上的强层，(6.4.7)给出了 $\theta$ 的强层分解式，由定理 6.4.1，所有的 $A^{0,q}$ 都是零调层，再根据定理 6.2.6，我们就证明了下述

**定理 6.4.3** (Dolbeault 定理). 如果 $M$ 是仿紧的复流形，则有

$$(6.4.8)\qquad H^q(M,\theta)=\frac{Ker[\Gamma(M,A^{(0,q)})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(M,A^{(0,q+1)})]}{I_m[\Gamma(M,A^{(0,q-1)})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(M,A^{(0,q)})]}$$
$$:=H^{0,q}(M)$$

同理，如以 $\Omega^p$ 表示 $M$ 上的全纯 $p$ 形式芽层，所谓全纯 $p$ 的形式

是指局部可表为 $\sum a_{i_1\cdots i_p}(z)dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}$ 的 $p$ 形式，其中 $a_{i_1\cdots i_p}(z)$ 是全纯的，则有如下的层正合序列

$$(6.4.9)\qquad 0\to\Omega^p\to A^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}A^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}A^{p,2}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots$$

这时的 Dolbeanlt 定理为

$$(6.4.10)\qquad H^q(M,\Omega^q)=\frac{Ker[\Gamma(M,A^{p,q})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(M,A^{p,q+1})]}{I_m[\Gamma(M,A^{p,q-1})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(M,A^{p,q})]}:=H^{p,q}(M).$$

上式中的 $H^{p,q}(M)$ 有时记为

$$(6.4.11)\qquad H^{p,q}_{\bar\partial}(M)=Z_{p,q}(M)/B_{p,q}(M)$$

并称为 **M 上的(p. q)型 $\bar\partial$ —上同调群.**

值得注意的是我们在判断层的序列(6.4.4)和(6.4.7)是正合时，是分别利用局部情形的 Poincarè 引理和 Dolbeauelt 引理，但从层的正合序列(6.4.4)和(6.4.7)分别得到的上同调群 $H^q(M,R)$，$H^q(M,C)$ 和 $H^q(M,\theta)$，$H^q(M,\Omega^p)$ 等却是整体的，这就说明了层和上同调提供了一个从局部分析到整体分析的有力工具的道理.

**推论 6.4.1** 复流形 $M$ 上关于 $(p,q)$ 形式的 $\bar\partial$ 方程(或称广义的 Canchy-Riemann 方程)为给定 $u\in C^\infty_{(p,q)}(M)$，$q\geqslant 1$，要找

$$(6.4.12)\qquad \bar\partial\omega=u \quad 在 M 上$$

的一个解 $\omega\in C^\infty_{(p,q-1)}(M)$.

由于 $\bar\partial^2=0$，所以(6.4.12)要想有解，就必须 $\bar\partial u=0$，所以 $\bar\partial$ 一方程(6.4.12)的可解性就是它相应的 $\bar\partial$ 一上同调群为零.

### 6.4.4 Leray 定理的意义

根据 Leray 定理，设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的一个层，$\mathscr{U}=\{U_j\}$ 是 $X$ 的一个开复盖，如果对于任意的 $U_{i_0},\cdots,U_{i_q}\in\mathscr{U}$，$H^p(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p},\mathscr{F})=0$，$\forall\ p\geqslant 0$，则 $\mathscr{U}$ 称为 Leray 复盖，这时由 Leray 复盖 $\mathscr{U}$ 所定义的 Čech 上同调群 $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 同构于按松软意义下的上

同调群 $H^p(X,\mathscr{F})$，如果有两个这样的 Leray 复盖，则它们定义的 Čech 上同调群将彼此同构，所以我们可以将 Čech 上同调 $H^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 定义为任何一个 Leray 复盖所定义的 Čech 上同调.

问题是 $\mathscr{U}$ 何时成为 Leray 复盖呢？答案是：如果每一 $U_i$ 是 Stein 流形，这只要将 $U_i$ 取得足够小，这时 $U_i$ 可看作是拟凸域，因此是一 Stein 流形，但是 Stein 流形的交还是 Stein 的，所以 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}$ 也是 Stein 的，根据 Dolbeault 定理

$$H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},\Omega^p)$$

$$=\frac{\operatorname{Ker}[\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},A^{p,q})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},A^{p,q+1})]}{\operatorname{Im}[\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},A^{p,q-1})\xrightarrow{\bar\partial}\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},A^{p,q})]}$$

由于 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}$ 是 Stein 的，故 $\bar\partial$ 一问题可解（参阅第四章和推论 6.4.1），因而

(6.4.13) $$H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},\Omega^p)=0,$$

这就表明 Stein 复盖是 Leray 复盖.

现设 $M$ 是仿紧的复流形，那末对 $M$ 的任何一个局部有限复盖 $\mathscr{U}$，都可以找到一个加细复盖，使加细复盖是 Stein 的，这只要在每点的局部取一个足够小的逆象邻域即可，而且不难证明，可使这一 Stein 复盖仍保持局部有限，再根据 Leray 定理. 就知道

Čech 上同调群 $H^q(\mathscr{U},\Omega^p)=$ 上同调 $H^q(M,\Omega^p)$

$$=H^{p,q}(M).$$

## § 6.5 层与上同调的应用：Cousin 问题与除法问题

本章一开始我们就已经指出，层与上同调理论在多复变数和代数几何中提供了一个从局部分析到整体分析的语言和工具. 本节就以多复变数中的著名问题 Cousin 问题，除法问题等为例来说

明这一点. 读者将会看出,层论这种工具本身并不能消除问题的基本难点,但它对许多问题的解决提供了统一的语言工具,其作用是不能低估的.

### 6.5.1 Cousin 问题 I

这是单复变数中著名的 Mittag-Leffler 定理的拓广,在单复变数中该定理说,在复数平面的一区域 $D$ 上可以找到一个亚纯函数,使其主要部份等于预先给定的极点的主要部分,答案是肯定的. 这个 定理是用部份分式这个工具解决的,在多复变数中不但不能再使用这个工具,由于在多复变数中零点和奇点都不是孤立的,所以这个问题的正确提法也要弄清楚,才能加以证明.

多复变数中相应于单复变数的 Mittag-Leffler 定理的问题称为 Cousin 问题 $I$,这是因为 1895 年 Cousin 首先考虑这个问题,这个问题的一般提法如下:

**Cousin 问题 I**:设 $D$ 是 $C^n$ 中的一域,$\mathscr{U} = \{U_i\}$ 是 $D$ 的一个开复盖,相应于 $\mathscr{U}$ 有一组亚纯函数$\{f_i\}$,满足:

$f_i$ 在 $U_i$,上亚纯,$f_j - f_i \in A(U_i \cap U_i)$ 问是否存在一个在整个 $D$ 上亚纯的函数 $f$,使 $f - f_i$ 在 $U_i$ 上全纯?

这个问题在本世纪 50 年代初被 H. Cartan 及 J. P. Serre 应用层论这个工具漂亮地解决了.

下面先给出这个问题使用 60 年代发展起来的 $\bar{\partial}$ 一方程的方法的简单的证明,然后再介绍这个问题的层论说法.

**定理 6.5.1**(Cousin 问题 Ⅰ)如果 $D$ 是拟凸域,则 Cousin 问题 Ⅰ可解.

**证明** 如果我们能够找到一全纯函数族$\{U_i, g_i\}$,$g_i \in A(U_i)$,使得在 $U_i \cap U_j$ 上 $f_j - f_i = g_j - g_i$,那末只要令 $f = f_j - g_j$,就得到一个定义在 $D$ 上的亚纯函数满足条件,因为在 $U_i \cap U_j$ 上,$f_j - g_j = f_i - g_i$,所以 $U_i \cap U_j$ 上也就有 $f_j - f_i = g_j - g_i \in A(U_i \cap U_j)$.

为了找全纯函数族$\{U_i, g_i\}$，先找一个 $C^\infty$ 的函数族$(U_i, , U_i)$，$u_i \in C^\infty(U_i)$，令 $f_{ij} = f_j - f_i \in A(U_i \cap U_j)$，它显然满足：

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0|_{U_i \cap U_j \cap U_k}.$$

取相应于 $\mathscr{U} = \{U_i\}$ 的单位分解$\{\eta_i\}$，即一组 $C_0^\infty$ 函数 $\eta_i \geqslant 0$，$\mathrm{Supp}\eta_i \subset U_i$，$\sum \eta_i = 1$，令

$$u_j = \sum_R \eta_k f_{kj}$$

则有

$$u_j - u_i = \sum_k \eta_k f_{kj'} - \sum_k \eta_k f_{ki} = \sum_k \eta_k (f_{kj} - f_{ki})$$

$$= \sum \eta_k f_{ij} = f_{ij},$$

这时在 $U_i \cap U_j$ 上有

$$0 = \bar{\partial} f_{ij} = \bar{\partial} u_j - \bar{\partial} u_i,$$

因此，如命

$$\omega = \bar{\partial} u_j = \bar{\partial} u_i,$$

则 $\omega$ 是整体定义于 $D$ 的闭(0,1)形式，并且是 $C^\infty$ 的，因为 $D$ 是拟凸域，$\bar{\partial}$ 一问题有解，所以存在 $h \in C^\infty(D)$，使 $\bar{\partial} h = \omega$.

在每一 $U_i$ 上，令 $g_i = u_i - h$，则 $\bar{\partial} g_i = \bar{\partial} u_i - \bar{\partial} h = 0$，即 $g_i \in A(U_i)$. 同时在 $U_i \cap U_j$ 上有 $g_j - g_i = f_{ij} = f_j - f_i$，这就证明了定理.
□

从 Cousin 问题 I 的提法和以上定理的证明过程可以看出，它隐含着预层的结构，所以在讨论 Cousin 问题 I 的解时，很自然会引进层与上同调群的概念，下面我们就来看上述定理的层论说法.

**定理 6.5.2**(Cousin 问题 I) 设 $X$ 是复流形，如果 $H^1(X, \theta) = 0$，则 Cousin 问题 I 可解.

**证明** 设 $m$ 为亚纯函数的芽层，$\theta$ 为全纯函数的芽层，则 Cousin 问题 I 提法中的一族亚纯函数可以记为$\{f_i \in \Gamma(U_i, m)\}$，而 $f_i - f_j \in A(U_i \cap U_j)$ 则等价于 $\pi f_i = \pi f_j$，其中 $\pi: m \to m/\theta$ 为自然

同态(或称自然投射).

由层的正合序列

$$0 \to \theta \to m \xrightarrow{\pi} m/\theta \to 0$$

得长正合序列

$$0 \to \Gamma(X,\theta) \to \Gamma(X,m) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X,m/\theta) \to H^1(X,\theta) \to \cdots$$

由假设 $H^1(X,\theta) = 0$,所以 $\pi$ 是满的,但是由 $\pi f_i = \pi f_j$,我们可以定义一个 $\sigma \in \Gamma(X,m/\theta)$,这只要在 $U_i$ 上令 $\sigma = \pi f_i$ 就行;由 $\pi$ 的满射性,存在 $f \in \Gamma(X,m)$ 使 $\pi f = \sigma$,因而在每一个 $U_i$ 上,$\pi f = \pi f_i$,也就是 $f - f_i \in A(U_i)$. 定理证明. □

**推论 6.5.1** 当 $X$ 是拟凸域或 Stein 流形时,则 Cousin 问题 I 可解.

**证明** 因为在拟凸域和 Stein 流形上 $\bar{\partial}$ 一问题可解,所以由推论 6.4.1 知其相应的 $\bar{\partial}$ 一上同调群 $H^q(X,\theta) = 0, q > 0$. □

推论 6.5.1 就是定理 6.5.1

### 6.5.2 Cousin 问题 II

这是单复变数中 Weiertrass 定理在多复变数的拓广,在单复变数中该定理说,设在复数平面的一区域 $D$ 上给定一点集 $B$,在 $D$ 中无聚点,问是否存在 $D$ 上的全纯函数以 $B$ 为零点集?答案是肯定的. 这个问题是通过 Weierstrass 无穷乘积解决的,和 Cousin 问题 I 一样,由于多复变数中零点不是孤立的,所以不能再使用无穷乘积的方法,而且在多复变数中要把问题的正确提法弄清楚,才能解决.

和 Cousin 问题 I 一样,1895 年 Cousin 首先考虑推广 Weierstrass 定理的问题,所以在多复变数中这个问题称为 Couisn 问题 II,这个问题也是本世纪 50 年代初被 H. Cartan 和 J. P. Serre 运

用层论的方法漂亮地解决了.

Cousin 问题 Ⅱ 的一般提法如下：

**Cousin 问题** Ⅱ：设 $D$ 是 $C^n$ 中的一域，$\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是 $D$ 的一个开复盖，相应于 $\mathscr{U}$ 有一组全纯函数族 $\{U_i,f_i\}$，$f_i\in A(U_i)$，并且 $f_i/f_j$ 在 $U_i\cap U_j$ 中无零点，问是否存在 $D$ 上的一全纯函数 $f$，使得对 $\forall_i$，$f/f_i$ 在 $U_i$ 中无零点？

和 Cousin 问题 Ⅰ 的情况不同，答案是：即使 $D$ 是拟凸域，或 Stein 流形，也不一定可解，还和 $D$ 的拓扑性质有关.

以下我们用 $\theta^*$ 表示可逆全纯函数的芽层，$m^*$ 表示可逆亚纯函数的芽层，即 $m^*=m\setminus\{0\}$，$\mathscr{D}=m^*/\theta^*$ 叫做因子层（或除子层），我们有

**定理 6.5.3**（Cousin **问题** Ⅱ） 如 $X$ 是复流形，则 Cousin 问题 Ⅱ 可解的充分条件是 $H^1(X,\theta^*)=0$.

**证明** 设 $\{U_i,f_j\}$ 是 Cousin 问题 Ⅱ 中的任一局部全纯函数组，因为 $f_i/f_j$ 在 $U_i\cap U_j$ 上没有零点，这表明 $f_i/f_j\in\Gamma(U_i\cap U_j,\theta^*)$，而这等价于在 $U_i\cap U_j$ 上，$\pi f_i=\pi f_j$，其中 $\pi:m^*\to\mathscr{D}=m^*/\theta^*$ 为自然同态（或称自然投影）. 因此存在 $\tau\in\Gamma(X,\mathscr{D})$ 使对 $\forall_i$，在 $U_i$ 上，$\tau=\pi f_i$.

这时 Cousin 问题 Ⅱ 可解等价于存在一 $\sigma\in\Gamma(X,m^*)$，使 $\pi\sigma=\tau$，如果这样的 $\sigma$ 存在，那末

$\forall_i$，在 $U_i$ 上，$\pi\sigma=\tau=\pi f_i\Leftrightarrow\sigma/f_i\in\Gamma(U_i,\theta^*)$ 这表明 $\sigma$ 在 $U_i$ 上全纯，并且和 $f_i$ 有共同的零点.

但是，存在 $\sigma\in\Gamma(X,m^*)$，使 $\pi\sigma=\tau$，这只要

$$\pi:\Gamma(X,m^*)\to\Gamma(X,m^*/\theta^*)$$

是满射就行.

由层的正合序列

$$0\to\theta^*\to m^*\xrightarrow{\pi}m^*/\theta^*\to 0$$

得长正合序列

$$0\to\Gamma(X,\theta^*)\to\Gamma(X,m^*)\xrightarrow{\pi}\Gamma(X,m^*/\theta^*)\to H^1(X,\theta^*)\to\cdots$$

但根据假设 $H^1(X,\theta^*)=0$，所以 $\pi$ 是满射，定理证明. □

**推论 6.5.2** 如 $X$ 是拟凸域或Stein 流形，并且 $H^2(X,Z)=0$，则 Cousin 问题 Ⅱ 可解，其中 $Z$ 是只取整数的常数芽层.

证明：由层的正合序列

$$0\to Z\to\theta\xrightarrow{exp(2\pi i)}\theta^*\to 0$$

得长正合序列

$$\cdots\to H^1(X,\theta)\to H^1(X,\theta^*)\to H^2(X,Z)\to H^2(X,\theta)\to\cdots$$

因为 $X$ 是拟凸域或Stein 流形，所以 $\bar{\partial}$ —问题可解，因此有 $H^1(X,\theta)=H^2(X,\theta)=0$(见推论 6.4.1). 因此 $H^1(X,\theta^*)\cong H^2(X,Z)$，再由定理 6.5.3 即得所证. □

### 6.5.3 除法问题

**除法问题**：设 $D$ 是 $C^n$ 中的域，$0\in D,f\in A(D)$，并且 $f(0)=0$，问是否存在 $f_1,\cdots,f_n\in A(D)$，使

$$f=\sum_{K=1}^{n}z_kf_k.$$

当 $D$ 是拟凸域或全纯域时，除法问题是可解的，这就是我们前面介绍的 Hefer 定理(定理 4.4.1).

这样的分解在 $0\in D$ 的局部是不成问题的，这由 Taylor 展开式就知道. 因为在非 0 点，至少有一坐标不是零，例如 $z_1$，这时 $f(z)$ 可写成

$$f(z)=\frac{f(z)}{z_1}z_1+0+\cdots+0,$$

就局部来说，这样的展开也是可以的，问题是否能找到整个 $D$ 上的展开式.

除法问题的解法很多，例如利用 Cousin 问题等，现在我们利用层论来解决这一个问题.

**Koszul 复形(Koszul complex)**：

我们先引进 Koszul 复形的概念，取全纯函数的芽层 $\theta$，设 $p\leqslant n$，记

$$\theta^{\binom{n}{p}}=\underbrace{\theta\oplus\theta\oplus\theta\cdots\oplus\theta}_{\binom{n}{p}\text{个}}$$

引进形式变量 $x_1,\cdots,x_n$，使 $\theta^{\binom{n}{p}}$ 中的元素表示为

$$\sum f_{i_1\cdots i_p}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p},\ f_{i_1\cdots i_p}\in\theta$$

则我们有以下序列

(6.5.1) $$0\to\theta^{\binom{n}{n}}\xrightarrow{d_n}\theta^{\binom{n}{n-1}}\xrightarrow{d_{n-1}}\theta^{\binom{n}{n-2}}\to\cdots$$
$$\cdots\xrightarrow{d_2}\theta^{\binom{n}{1}}\xrightarrow{d_1}\sum z_k\theta\to 0$$

算子 $d_p$ 与 $\theta$ 中的元素可交换，于是只要看 $d_p$ 对基的作用，即看 $d_p(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge d_{z_p})$，它的定义为

$$d_p(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}Z_{i_k}\wedge\cdots\wedge\hat{x}_{i_k}\wedge\cdots\wedge x_{i_p},$$

在上述定义下，序列(6.5.1) 称为 **Koszul 复形**.

**引理 6.5.1** Koszul 复形(6.5.1) 是正合的.

**证明** 首先证明 $d_{p-1}d_p=0$，因为 $d$ 与 $\theta$ 中的元素可交换，所以只要在基上证明就可以了. 我们有

$$d_p(x_1\wedge\cdots\wedge x_p)=\sum_k(-1)^{k-1}z_kx_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_r\wedge\cdots\wedge x_p$$

$$\begin{aligned}&d_{p-1}d_p(x_1\wedge\cdots\wedge x_p)\\&=\sum_k\sum_{j<k}(-1)^{k+j}z_jz_kx_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge\hat{x}_k\wedge\cdots\wedge x_p\\&+\sum_k\sum_{j<k}(-1)^{k+j-1}z_kz_jx_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_k\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_p=0.\end{aligned}$$

其次要证明：Ker$d_p$ = Im$d_{p+1}$，即如 $d_pf = 0$ 则 ∃ $g \in \theta^{\binom{n}{p+1}}$，使 $f = d_{p+1}g$.

现用归纳法来证明，对 $n$ 作归纳. 当 $n = 1$ 时是平凡的，设命题对小于 $n$ 的情况已正确. 将 $f$ 写成 $f = a \wedge x_n + b$，其中 $a \in \theta^{\binom{n}{p-1}}$，$b \in \theta^{\binom{n}{p}}$ 都不含 $x_n$，由

$$0 = d_pf = d_p(a \wedge x_n + b) = d'_{p-1}a \wedge x_n + (-1)^{p-1}z_na + d'_pb,$$

其中 $d'_p$ 表示 $n-1$ 维时的 $d$，因为 $z_na, d'_pb$ 都不含 $x_n$，所以有

(6.5.2) $\quad d'_{p-1}a = 0, (-1)^{p-1}z_na + d'_pb = 0,$

由归纳假设，存在 $\alpha \in \theta^{\binom{n}{p}}$，使 $a = d'_p\alpha$，代入(6.5.2)得

$$(-1)^{p-1}z_nd'_p\alpha + d'_pb = 0$$

或

$$d'_p(b + (-1)^{p-1}z_n\alpha) = 0.$$

因为 $a$ 中没有 $x_n$，所以 $\alpha$ 中也没有 $x_n$，因此由归纳假设，存在 $\beta \in \theta^{\binom{n}{p+1}}$，使

$$b + (-1)^{p-1}z_n\alpha = d'_{p+1}\beta$$

于是

$$f = a \wedge x_n + b = d'_p\alpha \wedge x_n + (-1)^pz_n\alpha + d'_{p+1}\beta$$
$$= d_{p+1}(\alpha \wedge x_n + \beta)$$

取 $g = \alpha \wedge x_n + \beta$ 即得所求. □

在(6.5.1)中，如$(f_1,\cdots,f_2) \in \theta^{\binom{n}{1}}$，则

$$d_1(f_1,\cdots,f_n) = \sum_{k=1}^{n} z_kf_k,$$

前面我们已经说过，对 $f \in A(D)$，在任何局部都可以表成 $\sum_{k=1}^{n} z_kf_k$ 的形式，因此 $f \in \Gamma(D, \sum_{k=1}^{n}, z_k\theta)$.

所以除法问题相当于证明

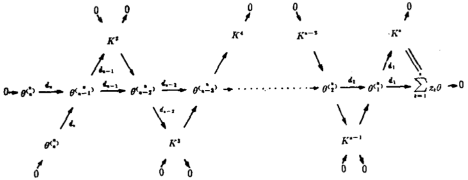
$$\Gamma(D, \theta^{\binom{n}{1}}) \to \Gamma(D, \sum_{k=1}^{n} z_k\theta) \to 0$$

是正合的，这可由层的正合序列(6.5.1)所诱导的上同调群的正合性得到.

值得注意的是在此我们利用的是 $f\in A(D)$ 在局部可以表成 $\sum_{k=1}^{n}z_kf_k$ 的形式，但通过层的上同调群的正合性以后却得到整体的结果，这就是层和上同调群从局部分析到整体分析的妙用.

**定理 6.5.4**(除法问题)　如 $D$ 是拟凸域，则除法问题有解.

**证明**　由 Koszul 复形正合序列(6.51)可引出一组层的短正合序列如下：



其中

$$K^2=\theta^{\binom{n}{n-1}}/\mathrm{Im}d_n=\theta^{\binom{n}{n-1}}/\mathrm{Ker}d_{n-1}=\mathrm{Im}d_{n-1},$$

$$K^3=\theta^{\binom{n}{n-1}}/\mathrm{Im}d_{n-1}=\theta^{\binom{n}{n-2}}/\mathrm{Ker}d_{n-2}=\mathrm{Im}d_{n-2},$$

……

$$K^n=\mathrm{Im}d_1=\sum_{k=1}^{n}z_k\theta.$$

由正合序列

$$0 \to \theta^{\binom{n}{n}} \to \theta^{\binom{n}{n-1}} \to K^2 \to 0$$

诱导出长正合序列

$$\cdots \to H^p(D,\theta) \to H^p(D,\theta^{\binom{n}{n-1}}) \to$$

$$\to H^p(D,K^2) \to H^{p+1}(D,\theta) \to \cdots$$

因为 $D$ 是拟凸域,$\bar{\partial}$ 一问题可解,所以有 $H^p(D,\theta^{\binom{n}{n-1}}) = H^{p+1}(D,\theta) = 0$(见推论 6.4.1),所以

$$H^p(D,K^2) = 0, \forall\ p > 0,$$

逐次检验,可知

(6.5.2) $$H^p(D,K^q) = 0, \forall\ p > 0, q \geqslant 2.$$

而从短正合序列

$$0 \to K^{n-1} \to \theta^{\binom{n}{1}} \to K^n = \sum_{k=1}^{n} z_k\theta \to 0$$

可诱导出长正合序列

$$0 \to \Gamma(D,K^{n-1}) \to \Gamma(D,\theta^{\binom{n}{1}}) \to$$

$$\to \Gamma(D,\sum_{k=1}^{n} z_k\theta) \to H^1(D,K^{n-1}) \to \cdots$$

由(6.5.2)式

$$H^1(D,K^{n-1}) = 0,$$

所以得正合序列

$$0 \to \Gamma(D,K^{n-1}) \to \Gamma(D,\theta^{\binom{n}{1}}) \to \Gamma(D,\sum_{k=1} z_k\theta) \to 0.$$

这就是所要证的. □

层与上同调在全纯开拓上也有重要应用,请读者参阅 §5.3 的第 5.3.3 段.

## 第六章 参考文献

伍鸿熙、吕以辇、陈志华[1981]

肖荫堂[1979]

张锦豪[1982]

钟家庆[1983]

H. Cartan[1951/1952]

H. Grauert & K. Fritsche[1976]

H. Grauert & R. Remmert[1979][1984]

R. Gunning & H. Rossi[1965]

L. Hörmander[1973]

R. M. Range[1986]

# 参 考 文 献


王小芹 [1985]Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解,厦门大学研究生硕士学位论文摘要,1986,1-2

华罗庚 [1958]多复变函数论中典型域的调和分析,科学出版社

伍鸿熙、吕以辇、陈志华 [1981]聚黎曼曲面,科学出版社

肖荫堂 [1979]多复变函数论讲义(陈志华、钟家庆整理),厦门大学数字系印

邱春晖 [1988]Fandemental solutions with weight factors of Cauchy-Riemann equations on Stein manifolds, Contri-buted to the International Symposium of Number Theory and Analysis, Dedicated to the Memery of Hua Loo-keny, 1988, Beijing.

陆启铿 [1961]多复变数函数引论,科学出版社

______,[1964]多复变数的统一 Cauchy 公式,1964年9月全国函数论会议报告(上海).

______,[1966]关于 Cauchy-Fantappiè 公式,数学学报,16,344-363.

______,钟同德[1957]Привалов 定理的拓广,数学学报,7,144-165.

陈省身、陈维桓[1983]微分几何讲义,北京大学出版社.

林亚先 [1985]关于 Stein 流形上 $\bar{\partial}_b$ 一问题,厦门大学研究生硕士学位论文摘要,1986,18-20.

张锦豪 [1982]多复变函数论讲义,复旦大学数学系印

钟同德 [1986]多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程,厦门大学出版.

______,[1987a]Stein 流形上全纯函数的积分表示,厦门大学学报(自然科学版),26,385-389.

______,[1987b]Stein 流形上的 Andreotti-Norguet 公式及其拓广,厦门大学学报(自然科学版),26,641-643.

______,[1987c]Holomorphic extension on Stein mamifokds, Research Report No.

10, Mittag-Leffler Institute.

______, [1988]On the Extension of (p,q)Differential Forms from Boundary, Contributed to the International Symposium of Number Theory and Analysis, Dedicated to the Memory of Hua Loo-keng, 1988, Beijing , Sprinqer-Verlag. (将出版).

钟家庆 [1983]多复分析基础,北京大学数学系,中国科学院数学研究所

蔡李宏 [1988]Stein 流形上加权的 Honkin-Ranirez 公式,厦门大学基础数学硕士学位论文.

Aizenberh, L. A, and Yuzhakov, A. P. [1983]Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis. Transl. Math, Monographs 58, Amer. Math. Soc, Providence, R. I.

Bell, S. R, and Ligocka, E. [1980]A simplification and extensiom of Fefferman's Theorem on biholomorphic mappings. Invent. Math. 57, 283-289.

Bergman, S, [1922]Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach orthogonalfunktionen, Math. Anm. 86, 237-271.

______, [1931]Ueber die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei Komplexen Veränderlichen, Math. Ann, 104, 611-636.

______, [1947]Sur les fonctions orthogonales de plusieurs uariables complexes avec les applications a la theorie des Sciences Mathematiques, 106, Paris(陆启铿,谢晖春译,科学出版社,1960).

______, [1948]Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la theorie des transformations pseudo-conformes, Memorial des Sciences Mathematiques, Vol. 108, Paris,

Berndtson, B, and Anderson, M, [1983]Henkin-Ramirez formulas with weight factors, Ann. Inst. Fourier(Grenoble)32, 91-110.

Bishop, E. [1961]Mappings of partially analytic spaces, Amer. J. Math, 83, 209-242

Bochner, S, [1943]Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Math. 44, 652-673.

Bremermamm, H. J. [1954]über dieÄquivalenz der Pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 128, 63-91.

Cartan, H [1951/52]Séminaire, École Norm. Sup, paris

______, and Thullen, P. [1932] Zur Theorie der Singularitaäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 106, 617-647.

Demailly, J. P., and Laurent-Thiebaut, C. [1987] Formules intégrales pour les formes différentielles de type (p, q) dans les variétés de Stein. (Preprint).

Diederich, K., and Fornaess, J. E. [1978]Pseudoconvex domains with real analytic boundary. Ann. of Math. 107, 371-384.

Fefferman, C. [1974]The Bergman Kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. Invent. Math26, 1-65.

Folland, G. B., and Kohn, j. j. [1972]The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann complex. Ann. of Math. Studies 75, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.

Grauert, H. [1958]On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. 68, 460-472.

______, and Fritzsche, K. [1976]Several Complex Variables, Springer-Verlag, New York. (黄沙、李生训译, 钟同德校, 科学出版社, 1988).

______, and Lieb, I. [1970]Das Ramirezsche Integral und diell ösung der Gleichung $\bar{\partial} f=\alpha$ im Bereich der beschränkten Fornen. Proc, Conf. Complex Analysis, Rice University, 1969. Rice Univ. Studies 56, 29-50.

______, and Remmert, R. [1984]Coherent Analytic sheaves. Springer-Verlag, New Youk.

Gunning, R. and Rossi, H. [1965]Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, Englewovk Cliffs, N. J.

Hartogs, F. [1906a] Einige Folgerungen aus der Cauchyschen integral-formel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. Münch. Ber. 36, 223 -242.

______, [1096b] Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die-Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veräderlichen fortschreiten. Math. Ann. 62, 1-88.

Harvey, R., and Lawson, B. [1975]On boundaries of complex analytic varieties. I.

Ann. of Math. 102, 23?-290.

Harvey, R, and Polking, J. [1979]Fundamental solutions in complex analysis. I : The Cauchy-Reamann operator. Duke Math. J. 46, 253-300. II : The induced Cauchy-Riemann operator. Duke Math. J. 46. 301-340.

Hefer, H. [1950]Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die Weilsche Integraldarstellung. Math. Ann. 122, 276-278.

Henkin, G. M. and Leiterer, J. [1979]Global integral formulas for solving the $\bar{\partial}$-equation on Stein manifolds, Preprint, Berlin and Warszawa.

______, [1981]Global Integral formulas for solving the $\bar{\partial}$-equation on Stein manifolds, Ann. pol Math. XXXIX 83-116.

______, [1983]Theory of functions on complex manifolds, Abteilung II, Bd. 60 (Mathematische Lehrbücher und Monographion). Akademie Verlag Berlin.

Hörmander, L. [1965]$L^2$ estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 113, 89-152.

______[1966]An Introduction to complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

[1973]An Introduction to complex Analysis in Several Variables. 2nd ed. , North Holland publishing Co. , Amsterdam.

Kerzman, N. [1972]The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary. Math. Ann. 195, 149-158.

Kohn, J. J. [1963]Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds. I: Ann. of Math. 78, 112-148.

______, [1964]Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds. II : Ann. of Math. 79, 450-472.

______, and Rossi, H. [1965]On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifolds. Ann. of Math. 81, 451-472.

Laruent-Thiebaut, C. [1982]Formules intégrals et théorémes du type "Bochner"sur une variété de Stein. C. R. Acad. Sci. Pairis, 295(6 décember 1982), Série I, 661-664.

Leray, J. [1939]Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe: Problème de Cauchy III. Bull. Soc. Math. France 87, 81-180. (陈志华译,《数学译丛》,1965,5,40-87).

Levi, E. E. [1910]Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. Ann. Mat. pura appl. 17, 61-87.

______, [1911]Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensionichepossono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse. Ann. Mat. pura appl. 18, 69-79.

Lieb, I. [1970]Die Cauchy-Rieman schen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. Math. Ann. 190, 6-44.

______, [1972]Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen Gebieten. Stetige Randwerter, Math. Ann. Bd. 199, 241-256.

Ligocka, E. [1984]The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings. Studie math. 80, 89-107.

Martinelli, E. [1942/43]Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs. Comm. Math. Helv. 15, 340-349.

______, [1953]Sur L'extension des theoremes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloque sur les fonct. de plus. var. compl. Tenn. a Bruxelles, 109-124.

Narasimhan, R. [1961]Holomorphically complete convex spaces, Am. J. Math. 82, 917-934.

______[1973]Analysis on real and complex manifolds. 2nd ed. North-Holland. (陆家柱译,科学出版社,1986)

Norguet, F. [1960] Representations intègrales des fonction de plusieurs variables complexes, C. R. 250, 1780-1782.

______, [1961a]Problems sur les formes differentielles et les courants, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 11, 1-82.

______, [1961b]Intègrales de formes differentilles exterieures non fermees, Rendiconti Mathematica 20, 355-371.

Oka, K. [1984]Collected Papers. Transl. by R. Narasimhan, with comments by H. Cartan, R. Remmert, ed. Springer-Verlag, New Youk.

Ø vrelid, N. [1971]Integral representation formulas and $L^p$-estimates for the $\bar{\partial}$-equation. Math. Scand. 29, 137-160.

Palm, A. [1975]An integral formula for holomorphic functions on strictly pseudoconvex hypersurfaces, Duke Math. J. 42, 347-356.

Plemelj, J. [1908]Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. Math. und Phys. 19, 205-210.

Ramirez, E. [1970]Ein Divisionproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis. Math. Ann. 184, 172-187.

Range, R. M. [1986]Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables. Springer-Verlag.

______, and Siu, Y. T. [1973]Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconuex boun-daries. Math. Ann. 206, 325-354.

Schneider, M. [1970]Vollständige Durchschnitte in Steinschen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 186, 191-200.

Shubin, M. A. [1970]On the holomorphic families of the subspaces of a Banack space, Matem. Isslcd. 5, Kishinev, 153-165. (in Russian).

Sammer, F. [1952]Ueger die Integralformeln in der funktionentheorie mehrerer Komplexer Veränderlichen, Math. Ann. 125, 172-182.

Stont, F. L. [1975]An integral formula for holomorphic functions on strictly pseudoconvex hypersurfcaes, Duke Math. J. 42, 347-356.

Webster, S. [1979]Biholomorphic mappings and the Bergman kernel off the diagonal. Invent. 51, 155-169.

Weil, A [1935]L'intégral de Cauchy et les functions de plusieurs variables. Math. Ann. 111, 178-182.

Айзенберг, Л. А, Южаков, А. П. [1979]Интегральные Представления и Вычты в многомерном комплексном Анализе, Издамельсмво《Науха》.

Владимиров, В. С. [1964] Методы теории функцкий многих комплексных переменных. Иззамельсmво《Науха》МОСКВА.

Какичев, В. А. [1959] Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных. Учен. Зап. Шахmинсхого пеэ. uн-ma 2,6,25-90.

Привалов, И. И. [1950] Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. 2-е под ред. А. И. Маркушевича, М. (吴亲仁译,科学出版社, 1956).

Сохоцкий Ю. В. [1873] Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разпожениях в ряды. С. -Петербург.

Фукс, Б. А. [1962] Введéние в тебрию аналитйчесних функций Многих Комплéсных перѐменных, Фuзмамuз.

______, [1963] Спецадьные главы теории аналитических функций многих комплѐксных переменных. Физмамиз.

Хенкин, Г. М. [1969] Интегральноe представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых оьластях и некоторые приложения. Мамем. СБ. 78 (120):4,611-632.

______, [1970] Интегральное представление функций в строго псевдовыпуклых областях и приложения к $\bar{\partial}$-задаче. Mamем. Сб. 82(124):2(6),300-308.

______, [1971] Равномерная оценка решения $\bar{\partial}$-задачив вобласти Вейля, Успхu мamем. наук, XXИ, Вып. з(159),211-212.

______, [1977] Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпоклом многообразии; Успехu Mamем. Наух, XXXД, Вып. з(195),57-118.

Чирка, Е. М. [1975] Аналитическое представление CR-функций. Mamем. Сб. 98 (140):4(12),591-623.

# 符号和记号汇编

## 一般记号

| | |
|---|---|
| $R,C$ | 实数;复数 |
| $R^n,C^n$ | $n$ 维实复欧几里得空间 |
| $\|z\|$ | $\|z\|:=(\|z_1\|^2+\cdots+\|z_n\|^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z\bar{z}}$,对 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ |
| $z\zeta$ | $z\zeta:=z_1\zeta_1+\cdots+z_n\zeta_n,z=(z_1,\cdots,z_n),\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ |
| $z^\alpha$ | $z^\alpha:=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n},z=(z_1,\cdots,z_n),\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_2)$ |
| $z^I$ | $z^I:=z_1z_2\cdots z_n,z=(z_1,\cdots,z_n),I=(1,1,\cdots,1)$ |
| $\langle b,a\rangle$ | $<b,a>:=b_1a_1+\cdots+b_na_n$,如 $b,a\in C^n$,如 $b\in T_z^*(M),a\in T_z(M)$ |
| $\langle\xi,\eta\rangle(x)$ | 向量 $\xi(x),\eta(x)$ 的方积 |
| $D^\alpha$ | 偏微分算子 |
| $F'(a)$ | 全纯映射 $F$ 的复 Jacobi 矩阵或导数 |
| $\|f\|,\\|f\\|$ | 当 $f=\varphi dx_1\Lambda\cdots\Lambda dx_n,x\in D,\|f\|:=\|\varphi\|dx_1\Lambda\cdots\Lambda dx_n$,$x\in D$<br>当 $f=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq n}f_{i_1\cdots i_s}(x)dx_{i_1}\Lambda\cdots\Lambda dx_{i_s},x\in D$,<br>$\\|f\\|=(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq n}\|f_{i_1\cdots i_s}(x)\|^2)^{\frac{1}{2}},x\in D$ |
| $K\subset\subset D$ | $K$ 在 $D$ 内是相对紧的 |
| $\bar{D}$ | 点集 $D$ 的拓扑闭包 |
| $\partial D$ | $D$ 的拓扑边界 |
| $\delta_D(Z)$ | 从 $Z\in D$ 到 $\partial D$ 的欧氏距离 |
| $D_xS$ | 截面 $S$ 沿切向量场 $X$ 的绝对微商 |

| | |
|---|---|
| $E \to M$ 或 $(E, M, \pi)$ | 复向量丛 |
| $\mathscr{F}$ 或 $(\mathscr{F}, \pi, X)$ | 拓扑空间 $X$ 上的层 |

## 特殊集合

| | |
|---|---|
| $B(Z^0, r)$ | 中心在 $Z^0$ 半径为 $r$ 的开球 |
| $D^n(Z^0, r)$ 或 $P(Z^0, r)$ | 中心在 $Z^0$ 半径 $r$ 为的开多圆柱 |
| $\mathrm{Supp}\psi$ | 最小闭集，$\psi$ 在这闭集之外为0 |
| $\hat{K}$ | 全纯凸包 |
| $\hat{K}_{ps(D)}$ | $K$ 在 $D$ 内的多次调和凸包 |
| $\Gamma(U, E)$ 或 $\Gamma(E)$ | $U$ 中 $E$ 值截面 |
| $\Gamma(U, \mathscr{F})$ | 层 $\mathscr{F}$ 在 $U$ 上的截影 |
| $H^p(X, \mathscr{F})$ | Grothendick 上同调群或称松软意义下的上同调群 |
| $H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ | Čech 上同调群 |
| $H^q(M, R)$，$H^q(M, C)$ | $M$ 的 de Rham 上同调群 |
| $H^q(M, \theta)$，$H^q(M, \Omega^p)$ | |
| $H^{p,q}(M)$，$H^{(p,q)}_{\bar{\partial}}(M)$ | $\bar{\partial}$-上同调群 |

## 函数空间

| | |
|---|---|
| $C(D)$，$C^{(k)}(D)$ | 在 $D$ 上的连续，及 $K$ 次连续可微函数 |
| $C^{(k)}(\overline{D})$ | $C^{(k)}(D)$ 上的函数，它的 $k$ 次导数在 $C(\overline{D})$ 中 |
| $A(D)$ 或 $\theta(D)$ | $D$ 上的全纯函数集合 |
| $A_c(D)$ | 在 $D$ 上全纯在 $\overline{D}$ 上连续的函数集合 |
| $C^\infty(D)$ | $D$ 上的光滑函数，在 $D$ 上存在任意次导数的函数 |
| $C_0(D)$，$C^{(\infty)}{}_0(D)$ | 在 $D$ 上连续并有紧支集的函数，在 $D$ 上光滑并有紧支集的函数 |
| $\vartheta$ | $C^n$ 上解析函数芽的层 |
| $\mathscr{E}$ | 域 $D \subset C^n$ 上的 $C^\infty$ 函数芽的层 |
| $m$ | $C^n$ 上亚纯函数芽的层 |
| $\vartheta^*, m^*, \mathscr{D} = m^*/\vartheta^*$ | 可逆全纯函数芽层，可逆亚纯函数芽的层，因子层 |
| ${}_M\vartheta^E$ | 全纯向量丛 $E$ 中的全纯截面芽层 |

| | |
|---|---|
| ${}_M\vartheta^N$ | ${}_M\vartheta^E := {}_M\vartheta^{M\times C^N}$ |
| $L^2H(D)$ | 在有界域 $D$ 上全纯并绝对值平方可积的函数的全体 |
| $L^2(D)$ | 在 $D$ 绝对值平方可积的函数 |
| $PS(D)$ | $D$ 上的多次调和函数 |
| $T_P(M)$ | $M$ 在 $P$ 的切空间 |
| $T^{(1,0)}M$ | 复流形 $M$ 的全纯切丛 |
| $T^{*(1,0)}M$ | 复流形 $M$ 的全纯余切丛 |
| $\Lambda^r T_P^*(M)$ | 在 $P$ 点的 $r$ 形式 |
| $C_r^{(l)}(M)$ | $M$ 上的 $C^{(l)}$类 $r$ 形式的空间 |
| $\mathscr{G}_p(M)$ | 在 $P$ 点形式的 Grassman 代数 |
| $C_{p,q}^{(k)}(M), C_{p,q}^{(\infty)}(M)$ | $C^{(k)}$类的$(p,q)$形式，光滑的$(p,q)$形式 |
| $W^s(D)$ | $D$ 上复值函数的 Sobolev 空间 |
| $W_0^s(i)$ | $C_0^\infty(D)$在 $W^s(D)$的闭包 |
| $H^s(D)$ | $W^s(D)$中全纯函数构成的子空间 |
| $C^\infty(\bar{D})$ | $D$ 中光滑到边界的复值函数的空间 |
| $H^\infty(\bar{D})$ | $C^\infty(\bar{D})$中全纯函数构成的子空间 |

## 特殊函数和形式

| | |
|---|---|
| $L_z(u,w)$ | $D$ 上多次调和函数 $u$ 的复 Hessian |
| $K(z,\bar{\xi})$ | Bergman 核函数 |
| $dz$ | $dz := d_1z_1dz_2\cdots dz_n$ 或 $dz = dz_1\Lambda\cdots\Lambda dz_n, z=(z_1,\cdots,z_n)$ |
| $d\bar{\xi}_{[k]}$ | $d\bar{\xi}_{[k]} := d\,\overline{\xi_1}\wedge\cdots\wedge d\xi_{k-1}\wedge \widehat{d\xi_k}\wedge d\xi_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\xi_n$，其中 $d\xi_k$ 不出现 |
| $dx^J$ | $dx^J := dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_r}, J=(j_1,\cdots,j_r)$ |
| $dv$ | $C^n$ 是的体积形式 |
| $\omega(\xi-z,\bar{\xi}-\bar{z})$或 $K(z,s)$ | Bochmer-Martinelli 核 |
| $\omega(\xi-z,u)$ | Leray 核 |
| $\omega(u),\omega'(v)$ | $\omega(u) := du_1\Lambda\cdots\Lambda du_n, \omega'(v) := \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\bigwedge_{s\neq j}dv_s$ |
| $\Omega(u,v)$ | $\Omega(u,v) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(v)\Lambda\omega(u)}{\langle v,u\rangle^n}$ |

| | |
|---|---|
| $t^{*}_{(s^{*},\bar{s},s)}(z,\zeta,\lambda)$ | 定义见第194页 |
| $F(\zeta,z), H(\zeta,z)$ | 定义见第152页和153页 |
| $\omega_{\alpha}^{\beta}$ | 联络形式 |
| $R^{\beta}_{\alpha i\bar{j}}, R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$ | 曲率张量 |
| $R_{\alpha\bar{\beta}}$ | Ricci 曲率张量 |
| $h_{i\bar{j}}$ | Hermite 结构 |
| $ds^2=h_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j$ | Hermite 度量 |
| $S(z,\zeta), S^*(z,\zeta)$ | $T(M)$和$T^*(M)$的全纯截面 |
| $\varphi(z,\zeta)$ | 权函数 |
| $\Omega_{\zeta}(\varphi^{\nu}(z,\zeta), s^{*(0)}, s^{*(1)}, \cdots, s^{*(n-1)}, s)$ | 定义见202页 |
| $\Omega_{\alpha}^{0}(\varphi^{\nu}, \bar{s}, s, z)$ | 定义见第203页 |
| $\langle u^*(z,\zeta), u(z,\zeta)^{\alpha+1}\rangle$ | 定义见203页 |
| $\widetilde{\Omega}(\varphi^{\nu}, s^*, s)$ | 定义见205页 |
| $\Omega_{q}^{p}, P_{q}^{p}$ | 定义见第208页和210页 |

## 算子

| | |
|---|---|
| $d$ | 外微分 |
| $\bar{\partial}$ | Cauchy-Riemann 算子:对于函数的,23,144;对于形式的 |
| $\bar{\partial}_b$ | 诱导 Cauchy-Riemann 算子或切线 Cauchy-Riemann 算子 |
| $\triangle$ | Laplace 算子,或 $C$ 中的开单位圆盘 |
| $d_{\zeta,\lambda}$ | 在 $C^n\times[0,1]$上的外微分 |
| $\bar{\partial}_{\zeta,\lambda}$ | $\bar{\partial}\zeta_{\zeta,\lambda}:=\bar{\partial}_{\zeta}+d_{\lambda}$,在 $C^n\times[0,1]$上的 $\bar{\partial}_{\zeta}+d_{\lambda}$ |
| $F^*$ | 微分形式在映射 $F$ 下的拉回 |
| $P_D$ | $D$ 上的 Borgman 射影 |
| $\lrcorner$ | 反导数 |
| $B_{\partial D}, L_{\partial D}$ | 对函数的积分算子 |
| $B_D, R_{\partial D}$ | 对1形式的积分算子 |
| $D=D'+D'', \nabla=\nabla'+\nabla''$ | 度量联络 |

# 索　引

## 三　画

## 四　画



## 五　画



## 六　画

## 七　画

## 八　画



## 九　画

## 十 画

## 十 一 画



## 十 三 画



## 十 四 画